

Analysis und Numerik von Minimalflächen mit freien Rändern

Von der Fakultät für Mathematik der Universität Duisburg-Essen
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation

von
Tristan Georg Jenschke
aus Duisburg

Gutachter: Prof. Dr. Ulrich Dierkes
Prof. PhD. Paola Pozzi
Prof. Dr. Klaus Deckelnick

Datum der mündlichen Prüfung: 24.03.2017

Zusammenfassung

In dieser Arbeit entwickeln wir eine Strafmethode zur Approximation von Lösungen des freien Randwertproblems für Minimalflächen. Wir untersuchen das Problem, Minimierer eines Funktionals F_λ zu finden, welches als Summe aus dem Dirichletintegral und einem geeigneten, durch einen Parameter λ gewichteten Strafterm definiert ist.

In einem ersten, analytischen Teil beweisen wir Existenz einer Lösung für λ groß genug ebenso wie Konvergenz gegen eine Lösung des freien Randwertproblems. Außerdem beweisen wir Regularität der Randwerte dieser Lösungen, was essentiell für weitere numerische Berechnungen ist.

Da wir zeigen können, dass Lösungen harmonische Funktionen sind, können wir unsere Untersuchungen auf den Rand beschränken, indem wir die harmonische Erweiterung verwenden.

In einem zweiten, numerischen Teil entwickeln wir ein vollständig diskretes Finite-Elemente-Verfahren zur Approximation von Lösungen dieses eindimensionalen Problems und beweisen eine Fehlerabschätzung, die eine Konvergenzordnung bezüglich der Gitterweite enthält.

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	1
1	Das freie Randwertproblem	5
2	Problemstellung	7
3	Existenz einer Lösung	10
4	Konvergenz für $\lambda \rightarrow \infty$	14
5	Konvergenzordnung	15
6	Sobolevräume fraktionaler Ordnung	19
7	Regularität	21
8	Das eindimensionale Funktional	27
9	Das diskrete Funktional	29
10	Der Algorithmus	32
11	Vorbereitende Abschätzungen	43
12	Konsistenz	48
13	Fehlerabschätzung	63
14	Numerische Ergebnisse	72
15	Das Plateau-Problem und Stützflächen mit Rändern	85

0 Einleitung

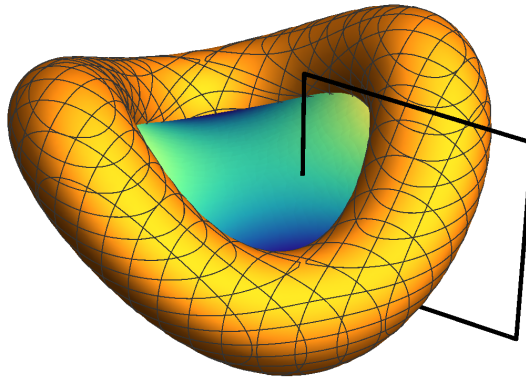
Unter einer „Minimalfläche mit freien Randwerten“ oder einer „Lösung des freien Randwertproblems“ versteht man einen Minimierer des Dirichletintegrals unter allen Flächen X vom Typ der Kreisscheibe, deren Randkurven auf einer vorgegebenen Stützfläche S liegen und in S nicht homotop zu einer konstanten Kurve sind.

Beispielsweise kann S eine Fläche vom topologischen Typ des Torus sein, dann gibt es (abhängig von der speziellen Form von S) zwei unterschiedliche Möglichkeiten, wie ein solcher Minimierer aussehen kann: Eine mögliche Lösung ist die kleinstmögliche Fläche X , die das Loch von S ausfüllt. Es könnte aber auch sein, dass eine oder mehrere Flächen im Inneren der von S umschlossenen Menge Minimierer sind.

Die Position der Lösung kann durch die Wahl eines Polygons spezifiziert werden, welches die Stützfläche S nicht schneidet. Man fordert dann, dass der Rand der Fläche X mit dem Polygon „verlinkt“ sein muss. (Siehe Abbildung 1.)

Auch für Stützflächen mit höherem topologischen Geschlecht ist das Problem sinnvoll gestellt. Durchläuft das gewählte Polygon mehrere Löcher von S , so füllt X das kleinste davon aus.

Abbildung 1: Eine Minimalfläche mit freiem Rand, welcher mit einem Polygon verlinkt ist.



Das freie Randwertproblem ist eine Variante des klassischen „Plateauschen Problems“, zu einer vorgegebene Randkurve Γ eine Fläche vom Typ der Kreisscheibe zu finden, die in Γ eingespannt ist und das Dirichletintegral minimiert.

Analytisch sind diese Probleme sehr gut verstanden. Man kann unter sehr schwachen Voraussetzungen an S bzw. Γ Existenz einer Lösung zeigen und unter entsprechenden Annahmen an die Regularität von S bzw. Γ kann Regularität der Lösungen bis zum Rand bewiesen werden. Wir geben im ersten Kapitel einen Überblick über die wichtigsten analytischen Resultate. Für diese und weitere, umfassende Ergebnisse über Minimalflächen und verwandte Themen siehe z.B. [4], [6],[5] und [16].

Will man eine Lösung X des Plateauschen Problems oder des freien Randwertproblems numerisch approximieren, so ergibt sich neben der hohen Nicht-linearität folgende Schwierigkeit: Die Nebenbedingung an die Randwerte von

X , auf der Stützfläche S bzw. auf der Kurve Γ zu liegen, ist eine punktweise Bedingung und als solche numerisch schwierig zu behandeln.

Im Fall des Plateauschen Problems wurden schon von mehreren Autoren sehr unterschiedliche Methoden entwickelt, die die obige Problematik umgehen. Die für uns relevantesten Ergebnisse zu diesem Thema finden sich in den Arbeiten von Dziuk und Hutchinson ([7] und [8]). Dort wird ausgenutzt, dass sich das Dirichletintegral über der Kreisscheibe B auch als eindimensionales Funktional über ∂B darstellen lässt, wenn man die harmonische Erweiterung verwendet. Damit lässt sich die Nebenbedingung in das Funktional „hineinziehen“, indem nur noch über Umparametrisierungen der Kurve Γ variiert wird. In diesen Arbeiten wird erstmals ein Konvergenzbeweis für eine vollständig diskrete Finite-Elemente-Approximation von (minimierenden und stationären) Minimalflächen geführt, der eine Konvergenzordnung bezüglich der Gitterweite (in der $H_2^1(B)$ -Norm) enthält. Die entsprechende Abschätzung dazu in der L_2 -Norm mit einer besseren Konvergenzordnung wird von Pozzi in [17] gegeben. Eine detaillierte Übersicht vorheriger Ergebnisse findet sich ebenfalls in [7].

Die einzige uns bekannte Arbeit zur Approximation von Lösungen des freien Randwertproblems ist die Dissertation von Tchakoutio [18]. Dort wird die obige Methode auf Stützflächen S vom Typ des Torus erweitert, indem eine Parametrisierung von S festgehalten wird und wiederum nur über Funktionen variiert wird, die ∂B auf einen Zylinder (das Urbild der Parametrisierung) abbilden. Auch hier wird, unter bestimmten a-priori Annahmen, ein Konvergenzbeweis wie in [7] und [8] geführt.

In dieser Arbeit stellen wir einen völlig neuen Ansatz zu dieser Problematik mittels einer Strafmethode vor. Dabei können wir Stützflächen *beliebigen* Geschlechts betrachten und bis auf die (geometrisch sinnvolle) Voraussetzung der Nichtdegeneriertheit der zweiten Variation, die wir ausführlich motivieren, benötigen wir keine weiteren a-priori Annahmen. Natürlicherweise können wir allerdings mit einer Strafmethode nur Minima und keine stationären Flächen untersuchen.

Unsere Methode basiert auf der folgenden Grundidee:

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ die Einheitskreisscheibe, λ ein beliebiger Parameter, δ die signierte Distanzfunktion zu S und $D(X) = \frac{1}{2} \int_B |\nabla X|^2$ das Dirichletintegral. Wir möchten gerne ein Funktional der Form

$$D(X) + \lambda \int_{\partial B} \delta(X)^2 |X_\varphi|$$

untersuchen. Hier „bestraft“ der zweite Term mit immer höheren Werten, wenn sich die Randwerte der Fläche X von der Stützfläche S entfernen. Wir wollen, analog zum freien Randwertproblem, dieses Funktional unter allen Funktionen X minimieren, deren Randwerte in einer „Verdickung“ von S liegen und in dieser Verdickung nicht homotop zu einer konstanten Kurve sind.

Aufgrund technischer Schwierigkeiten werden wir ein zu dieser Variante leicht verändertes Funktional F_λ benutzen. Die Definition von F_λ sowie die strikte Formulierung des dazugehörigen Variationsproblems \mathcal{P}_λ geben wir in Kapitel 2 an. (Siehe (1), (2) und (3).) Da die klassische Existenztheorie große Parallelen

zu unserer Strafmethode aufweist (siehe Beweis von Satz 1), halten wir uns dabei so dicht wie möglich an diese Ergebnisse.

In Kapitel 3 zeigen wir, dass (zumindest für λ groß genug) immer Lösungen X_λ der Probleme \mathcal{P}_λ existieren (Satz 5). Hier erweist es sich als größte technische Schwierigkeit, zu beweisen, dass die Randwerte einer Minimalfolge im Grenzwert nicht aus der Verdickung von S herausfallen (Lemma 6).

Mit dieser Methode haben wir die Nebenbedingung eliminiert, allerdings entsprechen Lösungen von \mathcal{P}_λ natürlich nicht den Lösungen des freien Randwertproblems, die wir eigentlich untersuchen wollen. Es muss also gezeigt werden, dass es sinnvoll ist, die Probleme \mathcal{P}_λ zu betrachten. Dazu beweisen wir in Kapitel 4, dass Lösungen X_λ für $\lambda \rightarrow \infty$ gegen eine Lösung des freien Randwertproblems konvergieren (Satz 9), wobei wir mit großem Vorteil die Parallelen zur klassischen Theorie ausnutzen können.

Für numerische Zwecke beweisen wir in Kapitel 5 noch eine quantitative Abschätzung für die Konvergenzordnung der Funktionalwerte $F_\lambda(X_\lambda)$ und $D(X_\lambda)$ in λ (Satz 10). Dies erweist sich als technisch viel anspruchsvoller als der Beweis von Satz 9 und erfordert differentialgeometrische Methoden.

Da wir zeigen können, dass Lösungen X_λ von \mathcal{P}_λ harmonisch sind, ist $F_\lambda(X_\lambda)$ durch die Randwerte $\gamma = X_\lambda|_{\partial B}$ eindeutig bestimmt. Wir können also nach dem Vorbild der Arbeiten von Dziuk und Hutchinson ([7], [8]) F_λ in ein eindimensionales Funktional $E_\lambda(\gamma)$ umschreiben, bei dem nur über die Randwerte γ variiert wird. In Kapitel 8 beweisen wir die Äquivalenz von \mathcal{P}_λ und des entsprechenden eindimensionalen Problems \mathcal{P}_λ^* (Satz 15). Letzteres ist numerisch offensichtlich viel günstiger zu behandeln als die zweidimensionale Version.

Wir stellen in Kapitel 9 eine naheliegende Diskretisierung $E_h^\lambda(\gamma_h)$ von $E_\lambda(\gamma)$ mittels stückweise linearer finiter Elemente vor, die sich ebenfalls stark an den Ideen aus [7] und [8] orientiert. Das heißt, um das Dirichletintegral der harmonischen Fortsetzung der Randwerte γ zu diskretisieren, verwenden wir die sogenannte diskrete harmonische Fortsetzung. (Siehe (25).)

Die Lösungen des diskreten Problems bzw. Nullstellen von δE_h^λ berechnen wir dann mittels eines gedämpften Newton-Verfahrens. In Kapitel 10 geben wir den benutzten Algorithmus an und berechnen die zur Implementierung benötigte Matrix-Vektor-Form der entsprechenden Terme.

In Kapitel 12 beweisen wir (unter der Voraussetzung $\gamma \in H_2^2$) Konsistenz des diskreten Funktional $E_h^\lambda(I_h\gamma)$ mit dem kontinuierlichen Funktional $E_\lambda(\gamma)$ sowie entsprechende Aussagen für die erste und zweite Variation. Da wir im Gegensatz zu [7] und [8] keine Umparametrisierung einer Kurve, sondern direkt die Kurve betrachten, ergibt sich eine verhältnismäßig einfache und geradlinige numerische Analysis.

Um eine Fehlerabschätzung zu erhalten, müssen diese Konsistenzabschätzungen auf Lösungen γ von \mathcal{P}_λ^* angewandt werden. Es wäre also wünschenswert, eine höhere Regularität solcher Lösungen zu beweisen und tatsächlich können wir in Kapitel 7 zeigen, dass $\gamma \in C^2$ gilt (Satz 14). Dazu beweisen wir eine spezielle, genau auf unseren Fall zugeschnittene Version des Satzes über implizite Funktionen und lösen damit die natürlichen Randbedingungen von \mathcal{P}_λ auf. Die-

ses Regularitätsresultat ist sicherlich das technisch schwierigste Ergebnis dieser Arbeit und baut unter Anderem auf tiefliegende Spur- bzw. Existenztheoreme aus der Theorie der Sobolevräume fraktionaler Ordnung auf (Siehe Kapitel 6.).

Mit diesen Vorbereitungen können wir schließlich in Kapitel 13 folgende Fehlerabschätzung zeigen: Sei γ ein Minimum des eindimensionalen Problems \mathcal{P}_λ^* , so dass $\delta^2 E_\lambda(\gamma)$ positiv definit ist. Dann existiert eine eindeutige Lösung γ_h des diskreten Problems mit

$$\|\gamma - \gamma_h\|_{H_2^1} \leq ch,$$

wobei c unabhängig von h ist. Außerdem ist diese Lösung sogar in der größeren Kugel um γ mit Radius $\epsilon\sqrt{h}$ eindeutig, wobei ϵ unabhängig von h ist (Satz 30). Ein entsprechendes Ergebnis für die zugehörigen diskreten Flächen geben wir ebenfalls an (Satz 31).

In Kapitel 14 geben wir einige Beispiele unserer numerischen Resultate an. Dabei stehen neben der Vielfältigkeit der möglichen Anwendungen auch Beobachtungen im Fokus, die unsere analytischen Resultate noch einmal numerisch belegen. Zum Beispiel untersuchen wir die Konvergenzordnung in λ und die Auswirkungen der einzelnen Terme des Funktionals F_λ für verschiedene Werte von λ .

Abschließend skizzieren wir in Kapitel 15, wie die hier untersuchte Methode auf das klassische Plateau-Problem angewandt werden kann. Außerdem geben wir einen Überblick über die auftretenden Probleme bei der Anwendung auf Stützflächen mit Rändern.

1 Das freie Randwertproblem

In diesem Abschnitt geben wir eine kurze Zusammenfassung der Lösung des freien Randwertproblems an. Dabei beschränken wir uns auf die wichtigen Definitionen und Beweisideen. Für eine ausführliche Darstellung siehe Kapitel 1.1 bis 1.3 in [6].

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine abgeschlossene Menge, $T_\mu = T_\mu(S) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \text{dist}(x, S) < \mu\}$ ihre μ -Verdickung und $M(S)$ bzw. $M(T_\mu)$ die Menge der Homotopieklassen geschlossener Kurven in S bzw. T_μ . Die Menge S erfülle folgende

Voraussetzung A: Es existiere eine Zahl $\mu > 0$, so dass die Inklusion $S \rightarrow T_\mu$ eine Bijektion von $M(S)$ nach $M(T_\mu)$ induziert.

Wir werden im nächsten Kapitel deutlich stärkere Voraussetzungen an S stellen. Für das hier vorgestellte Existenzresultat reicht aber die obige (sehr schwache) Voraussetzung an S aus.

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ die Einheitskreisscheibe und Π ein geschlossenes Polygon in \mathbb{R}^3 mit $\Pi \cap T_\mu = \emptyset$, dann definieren wir die Klasse von Vergleichsfunktionen:

$$\mathcal{C}(\Pi, S) := \{X \in H_2^1(B, \mathbb{R}^3) \mid X|_{\partial B}(w) \in S \text{ für f.a. } w \in \partial B, L(X|_{\partial B}, \Pi) \neq 0\}$$

Dabei ist $X|_{\partial B}$ die L_2 -Spur von X und L die Verlinkungszahl zweier geschlossener Kurven. Voraussetzung A stellt nun sicher, dass für jede Fläche X eine Randhomotopieklasse $[X|_{\partial B}] \in M(S)$ definiert werden kann und damit auch die Verlinkungszahl aufgrund ihrer Homotopieinvarianz wohldefiniert ist. Der Beweis dieser (keinesfalls trivialen) Aussage wird in Kapitel 1.1 von [6] ausgeführt (Theorem 3).

Da wir später mit stetigen Randkurven arbeiten werden und folglich die Verlinkungszahl klassisch definieren können, wollen wir hier nicht näher auf diese Problematik eingehen. Für die genaue Definition und Eigenschaften der Verlinkungszahl siehe Kapitel 1.2 in [6] und die dort zitierte Literatur.

Wir können nun das freie Randwertproblem formulieren und lösen. Der folgende Satz beinhaltet die Aussagen (i) und (iii) von Theorem 1 sowie die Aussage von Theorem 2 in Kapitel 1.3 von [6].

Satz 1 *Sei S eine abgeschlossene Menge, die Voraussetzung A erfüllt. Es existiere ein geschlossenes Polygon Π in \mathbb{R}^3 mit $\Pi \cap T_\mu = \emptyset$, so dass die Klasse $\mathcal{C}(\Pi, S)$ nicht leer ist, dann existiert eine Lösung \tilde{X} des Variationsproblems*

$$\mathcal{P}(\Pi, S) : D(X) \rightarrow \min \text{ in } \mathcal{C}(\Pi, S),$$

wobei $D(X) = \frac{1}{2} \int_B |\nabla X|^2$ das Dirichletintegral ist. Die Lösung \tilde{X} ist eine Minimalfläche und minimiert das Areafunktional $A(X)$ in $\mathcal{C}(\Pi, S)$.

Bemerkung: Mit der Wahl von Π können wir die Position der Lösung spezifizieren. Da S nicht einmal eine Fläche sein muss, kann ein „topologisches Geschlecht“ für S nicht definiert werden. Bildlich kann man aber sagen: Wenn Π genau ein „Loch“ von S durchläuft, wird die Minimalfläche dieses Loch ausfüllen.

Durchläuft Π mehrere Löcher von S , so wird die Minimalfläche das kleinste von ihnen ausfüllen. Wenn Π kein Loch von S durchläuft (z.B. weil S eine Fläche vom topologischen Typ der Sphäre ist), so ist die Klasse $\mathcal{C}(\Pi, S)$ leer und es gibt keine Lösung.

Wir führen hier eine kurze Beweisskizze von Satz 1. Dazu geben wir zuerst ein wohlbekanntes Resultat an, das wir oft benötigen werden (Siehe [10], Kapitel 16.):

Lemma 2 *Sei $\gamma \in C^0(\partial B, \mathbb{R}^3)$, dann existiert eine eindeutig bestimmte Funktion $\Phi(\gamma) \in C^0(\bar{B}, \mathbb{R}^3) \cap C^2(B, \mathbb{R}^3)$ mit $\Delta\Phi(\gamma) = 0$ auf B und $\Phi(\gamma)|_{\partial B} = \gamma$. Man nennt $\Phi(\gamma)$ die harmonische Fortsetzung von γ .*

Seien A, B abgeschlossene Mengen, dann sei $g(A, B) := \sup\{\text{dist}(x, B) \mid x \in A\}$. Setze außerdem $e := \inf\{D(X) \mid X \in \mathcal{C}(\Pi, S)\}$.

Wir nennen eine Folge $X_k \in H_2^1(B, \mathbb{R}^3)$ eine „generalized admissible sequence“ (g.a.s.) für $\mathcal{P}(\Pi, S)$, falls es eine Folge abgeschlossener Mengen S_k gibt mit $X_k \in \mathcal{C}(\Pi, S_k)$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} g(S_k, S) = 0$.

Setze nun $e^* := \inf\{\liminf_{k \rightarrow \infty} D(X_k) \mid \{X_k\} \text{ ist g.a.s. für } \mathcal{P}(\Pi, S)\}$. Nach Definition gilt $e^* \leq e$.

Wähle eine „generalized minimizing sequence“ (g.m.s.), also eine „g.a.s.“ Z_k mit $\lim_{k \rightarrow \infty} D(Z_k) = e^*$. Es ist nun möglich zu einer „g.m.s.“ Y_k von Funktionen mit absolutstetigen Randwerten überzugehen und nach Lemma 2 erhalten wir eine „g.m.s.“ X_k , indem wir zu diesen Randwerten jeweils die harmonische Fortsetzung nehmen. Für eine solche Folge gilt folgendes Resultat, das wir als Lemma formulieren, um später darauf zurückgreifen zu können:

Lemma 3 *Sei X_k eine „generalized minimizing sequence“ harmonischer Funktionen. Dann existiert eine Teilfolge, die schwach in $H_2^1(B)$ und gleichmäßig auf jeder Teilmenge $\Omega \subset\subset B$ gegen eine harmonische Funktion $\tilde{X} \in \mathcal{C}(\Pi, S)$ konvergiert.*

(Siehe Beweis von Theorem 1 in [6].) Wir bezeichnen die Teilfolge wieder mit X_k . Wegen der Unterhalbstetigkeit des Dirichletintegrals bzgl. schwacher Konvergenz in H_2^1 folgt sofort $D(\tilde{X}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} D(X_k) = e^* \leq e \leq D(\tilde{X})$, also $D(\tilde{X}) = e = e^*$.

Dass \tilde{X} eine Minimalfläche ist und das Areafunktional minimiert, kann genauso gezeigt werden wie für Lösungen des Plateau-Problems. (Siehe Theorem 2 und Theorem 4 in Kapitel 4.5 von [4].)

Satz 4 *Sei S eine 2-dimensionale, kompakte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 der Klasse C^m bzw. $C^{m,\beta}$, $m \geq 3$, $\beta \in (0, 1)$. Dann ist jeder stationäre Punkt des Dirichletintegrals in $\mathcal{C}(\Pi, S)$ von der Klasse $C^{m-1,\alpha}(\bar{B})$ für alle $\alpha \in (0, 1)$ bzw. $C^{m,\beta}(\bar{B})$.*

Im Wesentlichen folgt dies aus der Aussage von Theorem 1 in Kapitel 2.8 von [6]. Man kann sich leicht überzeugen, dass die dort geforderte Bedingung, dass S eine „admissible support surface“ ist (Siehe Definition 1 in Kapitel 2.6 von [6]), für eine kompakte Untermannigfaltigkeit trivialerweise erfüllt ist. Des Weiteren ist die Aussage von Theorem 1 für Lösungen von halbfreien Randwertproblemen formuliert, die verschiedenen Schritte des Beweises (Kapitel 2.5 bis 2.8) können aber ohne Weiteres auf freie Randwertprobleme übertragen werden. (Vgl. auch die Bemerkungen am Ende von Kapitel 2.4 in [6].)

2 Problemstellung

Natürlicherweise stellt sich das Problem, Lösungen des freien Randwertproblems numerisch zu approximieren. Die betrachtete Methode ist jedoch denkbar ungeeignet für numerische Zwecke, da die Randkurve punktweise die Nebenbedingung erfüllen muss, auf S zu liegen. Wir werden stattdessen eine Strafmethode benutzen. Im Folgenden erfülle S nun immer die

Voraussetzung B: Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale, kompakte Untermannigfaltigkeit der Klasse C^3 .

Es ist klar, dass damit auch wieder Voraussetzung A erfüllt ist.

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung von S und $G \in C^3(U)$ eine Funktion mit $S = \{x \in U : G(x) = 0\}$. Wir gehen also davon aus, dass eine globale Beschreibung von S durch eine Gleichung vorliegt. Der einfachste Fall, der sich auch gut für eine bildliche Vorstellung eignet, ist der, dass G die signierte Distanzfunktion zu S ist. Diese existiert natürlich immer in einer kleinen Umgebung von S und ist dort so regulär wie S selbst (siehe z.B. Kapitel 4.6 in [13]), hat aber in den seltensten Fällen eine einfache Darstellung. Wir lassen also auch allgemeinere Funktionen G zu, um eine möglichst große Klasse von Stützflächen S behandeln zu können. Insbesondere fordern wir auch nicht $\nabla G \neq 0$.

Sei $\lambda > 0$ ein beliebig gewählter Parameter und seien (r, φ) Polarkoordinaten auf \overline{B} . Weiter sei $P \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Punkt und $\varrho \in H_2^1(\partial B)$ eine Funktion mit $\varrho \geq 0$, $\varrho(0) = 1$ und $\varrho(\pi) = 0$. Wir untersuchen das Funktional

$$F_\lambda(X) := D(X) + \lambda \int_{\partial B} G(X)^2 \sqrt{|X_\varphi|^2 + \frac{1}{\lambda}} + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial B} (|X_\varphi|^2 + \varrho|X - P|^2), \quad (1)$$

das für alle $X \in H_2^1(B, \mathbb{R}^3) \cap H_2^1(\partial B, \mathbb{R}^3)$ mit $X(\partial B) \subset U$ wohldefiniert ist.

Bemerkung: Die hier zugrundeliegende Idee wäre eigentlich, mit dem Funktional $\tilde{F}_\lambda(X) := D(X) + \lambda \int_{\partial B} G(X)^2 |X_\varphi|$ in einer geeigneten Funktionenklasse zu arbeiten. Der Strafterm sollte dann dafür sorgen, dass sich für großes λ die Randkurve eines Minimierers X_λ in der Nähe der Stützfläche S befindet. Da dieser Strafterm invariant unter Parametertransformationen der Randkurve ist, ist ein solcher Minimierer von $\tilde{F}_\lambda(X)$ auch ein Minimierer von $D(X)$ unter festgehaltenem Bild der eigenen Randkurve $X_\lambda|_{\partial B}$ (also auch unter inneren Variationen) und somit eine Minimalfläche.

Leider ergeben sich aus diesem Ansatz schwerwiegende technische Probleme: Erstens existiert für $X_\varphi = 0$ keine erste Variation. Zweitens erhält man für die Randwerte einer Minimalfolge nicht einmal in der BV -Norm eine gleichmäßige Beschränktheit, also auch keinen schwachen Grenzwert! Drittens ist das Funktional $\tilde{F}_\lambda(X)$ invariant unter konformen Umparametrisierungen von B . Die zweite Variation von $\tilde{F}_\lambda(X)$ wäre also sicherlich nicht positiv definit, was ein Problem für die numerische Analysis in Kapitel 13 darstellt, wo wir gerade diese positive Definitheit a-priori voraussetzen müssen. (Die rein analytischen Untersuchungen in dieser Arbeit wären durch die konforme Invarianz nicht betroffen, da die in Kapitel 1 betrachtete Methode dies zulässt.) Durch „kleine“ Änderungen des Funktionals können wir diese Probleme eliminieren, wir verlieren dadurch aber

die gute Eigenschaft, dass Lösungen Minimalflächen sind.

Das erste Problem kann durch die Modifikation $|X_\varphi| \rightarrow \sqrt{|X_\varphi|^2 + \frac{1}{\lambda}}$ behoben werden. (Statt $\frac{1}{\lambda}$ könnten wir auch einen beliebigen konstanten Wert nehmen, wir wollen jedoch die ursprüngliche Idee so gut wie möglich approximieren.) Durch Addition des Regularisierungsterms $\frac{1}{\lambda} \int_{\partial B} |X_\varphi|^2$ wird das zweite Problem gelöst, wir können dadurch außerdem mit stetigen Randwerten arbeiten. Es ist nicht mehr anzunehmen, dass das so entstandene Funktional noch konform invariant ist, es ist aber sicherlich noch invariant unter Rotationen der Kreisscheibe B . Durch „festhalten“ eines sinnvoll gewählten Punktes P durch den zusätzlichen Term $\frac{1}{\lambda} \int_{\partial B} \varrho |X - P|^2$ kann dieses letzte Problem beseitigt werden, so dass wir nun das modifizierte Funktional F_λ benutzen.

Für große λ sind hier die Randterme sozusagen „fast“ invariant unter Parametertransformationen, Minima von F_λ sind also in einem gewissen Sinne „fast“ Minimalflächen. Beachte, dass diese Minimierer immer noch Minimierer von $D(X)$ unter festgehaltenen Randwerten sind, sie sind also harmonische Funktionen. (Vgl. Satz 5.)

Wir können nun $\mu > 0$ so klein wählen, dass $\overline{T_\mu} \subset U$. Da $G \in C^3(U)$ gibt es eine offene Menge \tilde{U} mit $\overline{T_\mu} \subset \tilde{U} \subset U$ auf der die Funktion G sowie ihre ersten, zweiten und dritten Ableitungen beschränkt sind.

Aus Kompaktheitsgründen können wir $\overline{T_\mu}$ mit endlich vielen in \tilde{U} enthaltenen Kugeln überdecken. Auf jeder dieser Kugeln sind G sowie ihre ersten und zweiten Ableitungen Lipschitzstetig und da eine aus endlich vielen $C^{0,1}$ -Funktionen zusammengesetzte Funktion wieder in $C^{0,1}$ ist, sind also G sowie ihre ersten und zweiten Ableitungen auf $\overline{T_\mu}$ Lipschitzstetig. Dies wird im Folgenden immer wieder verwendet.

Weiterhin sei μ so klein, dass die Inklusion $S \rightarrow T_{2\mu}$ eine Bijektion von $M(S)$ nach $M(T_{2\mu})$ induziert.

Diese Wahl von μ würde für die meisten der folgenden Resultate ausreichen. Für den Beweis der Konvergenzordnung in Kapitel 5 benötigen wir aber noch die stärkere Bedingung, dass die Beträge der Hauptkrümmungen von S durch $\frac{1}{2\mu}$ beschränkt sind und jede Parallellfläche von S im Abstand $\mu_0 < 2\mu$ eine Untermannigfaltigkeit der Klasse C^3 ist. Wir können μ zusätzlich so klein wählen, dass dies erfüllt ist. (Siehe Bemerkungen am Ende von Kapitel 4.6 in [13].)

Sei Π wieder ein geschlossenes Polygon, so dass $\Pi \cap T_{2\mu} = \emptyset$. Das Polygon Π hat hier also einen Abstand von mindestens μ zu der Menge T_μ . Wir können nun die Klasse von Vergleichsfunktionen definieren:

$$\mathcal{C} := \{X \in H_2^1(B, \mathbb{R}^3) \cap H_2^1(\partial B, \mathbb{R}^3) \mid X(\partial B) \subset T_\mu, L(X|_{\partial B}, \Pi) \neq 0\} \quad (2)$$

Dabei gibt L wieder die Verlinkungszahl zweier geschlossener Kurven an, die wir hier klassisch definieren können, da $X|_{\partial B}$ stetig ist. ($H_2^1(\partial B)$ bettet ein in $C^{0, \frac{1}{2}}(\partial B)$.)

Wir merken hier noch an, dass die Klasse \mathcal{C} nicht von λ abhängt. Außerdem ist sie nicht leer, wenn wir voraussetzen, dass $\mathcal{C}(\Pi, S)$ nicht leer ist. (Siehe Satz 5.) Man beachte auch die Analogie zur Vorgehensweise im Beweis von Satz 1, welche wir im Folgenden essentiell ausnutzen werden. (Siehe insbesondere Beweis von Satz 9.)

Es ergeben sich nun folgende Fragestellungen:
Ist das Variationsproblem

$$\mathcal{P}_\lambda : F_\lambda(X) \rightarrow \min \text{ in } \mathcal{C} \quad (3)$$

für λ groß genug lösbar? Falls ja, konvergieren Lösungen X_λ der Probleme \mathcal{P}_λ für $\lambda \rightarrow \infty$ in einer geeigneten Weise gegen eine Lösung \tilde{X} von $\mathcal{P}(\Pi, S)$?

Wie wir in den nächsten Kapiteln zeigen werden, können diese Fragen positiv beantwortet werden. Es ist also sinnvoll, statt des ursprünglichen Problems $\mathcal{P}(\Pi, S)$ die Probleme \mathcal{P}_λ numerisch zu behandeln. Der entscheidende Vorteil besteht nun darin, dass die Klasse \mathcal{C} eine offene Teilmenge von $H_2^1(B, \mathbb{R}^3) \cap H_2^1(\partial B, \mathbb{R}^3)$ ist, X_λ also ein lokales Minimum unter allen Variationen $\Psi \in H_2^1(B, \mathbb{R}^3) \cap H_2^1(\partial B, \mathbb{R}^3)$ mit $\|\Psi\|_{H_2^1(\partial B)} \ll 1$ ist. Wir haben also keine Nebenbedingung mehr, da die Bedingungen $X(\partial B) \subset T_\mu$ und $L(X|_{\partial B}, \Pi) \neq 0$ in einer Umgebung jeder Lösung von \mathcal{P}_λ erfüllt sind.

3 Existenz einer Lösung

Für $0 \leq t \leq \mu$ setzen wir

$$h(t) := \min_{z \in \overline{T_\mu} \setminus T_t} G(z)^2,$$

wobei $T_0 := \emptyset$. Dann gilt $h(0) = 0$ und $h(t) > 0$ für $t > 0$. Außerdem ist h nach Definition stetig und monoton wachsend. (Falls z.B. G die signierte Distanzfunktion ist, gilt $h(t) = t^2$.)

Das Ziel dieses Kapitels ist nun der Beweis folgender Aussage:

Satz 5 *Sei die Klasse $\mathcal{C}(\Pi, S)$ nicht leer und sei \tilde{X} eine Lösung von $\mathcal{P}(\Pi, S)$. Dann ist für alle $\lambda > \max \left\{ \frac{D(\tilde{X})+2}{\mu h(\frac{\mu}{2})}, \int_{\partial B} (|\tilde{X}_\varphi|^2 + \varrho |\tilde{X} - P|^2) \right\}$ das Variationsproblem \mathcal{P}_λ lösbar. Jede Lösung von \mathcal{P}_λ ist eine harmonische Funktion.*

Zuerst stellen wir fest, dass auch die Klasse \mathcal{C} nicht leer ist, da nach Satz 1 eine Lösung \tilde{X} von $\mathcal{P}(\Pi, S)$ existiert, die nach Satz 4 die erforderliche Regularität hat. Es gilt also $\tilde{X} \in \mathcal{C}$.

Bemerkung: Wir setzen im obigen Satz voraus, dass $\mathcal{C}(\Pi, S)$ nicht leer ist, da wir benötigen, dass beide Klassen nicht leer sind. Bildlich scheint es zuerst einmal völlig klar, dass aus der Voraussetzung, dass \mathcal{C} nicht leer ist, sofort folgen würde, dass $\mathcal{C}(\Pi, S)$ ebenfalls nicht leer ist. Ein strikter Beweis dieser Aussage würde aber eine recht komplizierte Konstruktion erfordern. (In Kapitel 5 führen wir eine ähnliche Konstruktion durch, dort ist die Ausgangslage allerdings deutlich einfacher.) Da wir die Probleme \mathcal{P}_λ aber überhaupt erst untersuchen, weil wir Lösungen von $\mathcal{P}(\Pi, S)$ approximieren wollen, ist die Voraussetzung, dass $\mathcal{C}(\Pi, S)$ nicht leer ist, eine absolut vernünftige Forderung.

Sei $e_\lambda := \inf \{F_\lambda(X) \mid X \in \mathcal{C}\}$. Wir wählen nun eine Minimalfolge für \mathcal{P}_λ , also eine Folge $X_k \subset \mathcal{C}$ mit der Eigenschaft $\lim_{k \rightarrow \infty} F_\lambda(X_k) = e_\lambda$.

Es gibt eine Konstante M_λ , so dass $D(X_k) \leq F_\lambda(X_k) \leq M_\lambda$ für alle k . Damit erhalten wir, dass es eine Teilfolge X_k gibt, die schwach in $H_2^1(B)$ gegen eine Funktion $X \in H_2^1(B)$ konvergiert.

Daraus folgt, dass die Spur $X_k|_{\partial B}$ in $L_2(\partial B)$ gegen $X|_{\partial B}$ konvergiert (Siehe Satz A6.13 in [1].) und da X_k eine Minimalfolge ist, gilt $\int_{\partial B} |(X_k)_\varphi|^2 \leq \lambda F_\lambda(X_k) \leq \lambda M_\lambda$. Es existiert also eine weitere Teilfolge X_k , deren Randwerte $X_k|_{\partial B}$ schwach in $H_2^1(\partial B)$ gegen $X|_{\partial B}$ konvergieren, und es folgt $X \in H_2^1(B) \cap H_2^1(\partial B)$.

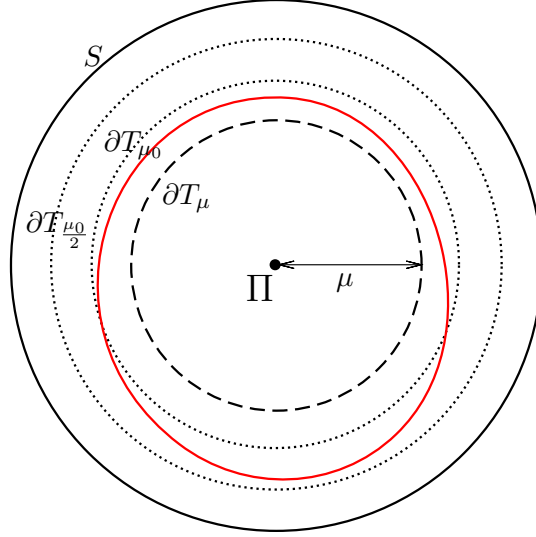
Lemma 6 *Sei $0 < \mu_0 < \mu$ beliebig, \tilde{X} eine Lösung von $\mathcal{P}(\Pi, S)$ und $\lambda \geq \max \left\{ \frac{D(\tilde{X})+2}{\mu_0 h(\frac{\mu_0}{2})}, \int_{\partial B} (|\tilde{X}_\varphi|^2 + \varrho |\tilde{X} - P|^2) \right\}$. Sei X_k eine Minimalfolge zu \mathcal{P}_λ , die schwach in $H_2^1(B)$ gegen eine Funktion $X \in H_2^1(B) \cap H_2^1(\partial B)$ konvergiert. Dann gilt $X(\partial B) \subset \overline{T_{\mu_0}}$.*

Beweis: Angenommen, es gäbe eine Teilfolge X_k mit $X_k(1, \varphi_k) \notin T_{\mu_0}$ für gewisse $\varphi_k \in [0, 2\pi]$. Falls $\partial T_{\mu_0} \cap X_k(\partial B) = \emptyset$, folgt

$$\lambda \int_{\partial B} G(X_k)^2 \sqrt{|(X_k)_\varphi|^2 + \frac{1}{\lambda}} \geq \lambda \int_{\partial B} G(X_k)^2 |(X_k)_\varphi| \geq \lambda h\left(\frac{\mu_0}{2}\right) 2\pi\mu,$$

da die Randkurve $X_k|_{\partial B}$ vollständig in $T_\mu \setminus T_{\frac{\mu_0}{2}}$ liegt (Beachte, dass h monoton wachsend ist.) und wegen $\Pi \cap T_{2\mu} = \emptyset$ und $L(X_k|_{\partial B}, \Pi) \neq 0$ die Randkurve $X_k|_{\partial B}$ eine μ -Umgebung von Π umlaufen muss, die Länge von $X_k|_{\partial B}$ also mindestens $2\pi\mu$ betragen muss. (Siehe Abbildung 2.)

Abbildung 2: Der Fall $\partial T_{\frac{\mu_0}{2}} \cap X_k(\partial B) = \emptyset$

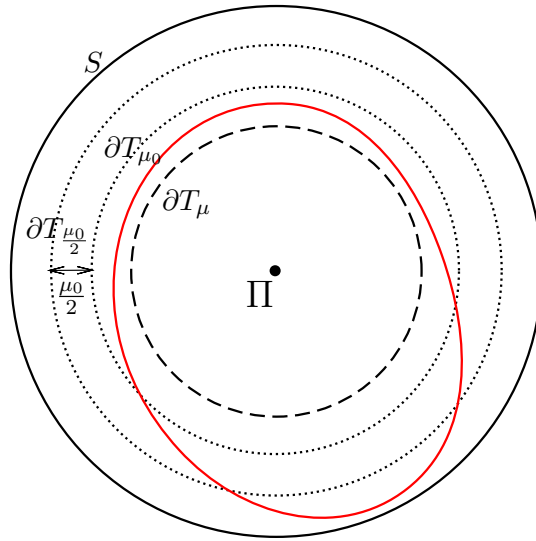


Falls $\partial T_{\frac{\mu_0}{2}} \cap X_k(\partial B) \neq \emptyset$, folgt

$$\lambda \int_{\partial B} G(X_k)^2 \sqrt{|(X_k)_\varphi|^2 + \frac{1}{\lambda}} \geq \lambda \int_{\partial B} G(X_k)^2 |(X_k)_\varphi| \geq \lambda h\left(\frac{\mu_0}{2}\right) 2\frac{\mu_0}{2},$$

da $X_k|_{\partial B}$ jeweils einen Wert in $\overline{T_{\frac{\mu_0}{2}}}$ und $T_\mu \setminus T_{\mu_0}$ annehmen muss und folglich zwei Teilkurven von $X_k|_{\partial B}$ der Länge $\frac{\mu_0}{2}$ in $T_{\mu_0} \setminus T_{\frac{\mu_0}{2}}$ enthalten sein müssen.

Abbildung 3: Der Fall $\partial T_{\frac{\mu_0}{2}} \cap X_k(\partial B) \neq \emptyset$



(Siehe Abbildung 3.) Insgesamt erhalten wir also

$$\lambda \int_{\partial B} G(X_k)^2 \sqrt{|(X_k)_\varphi|^2 + \frac{1}{\lambda}} \geq \lambda \mu_0 h \left(\frac{\mu_0}{2} \right).$$

Wie oben gesehen, gilt $\tilde{X} \in \mathcal{C}$. Außerdem gilt $G(z) = 0$ für alle $z \in \tilde{X}(\partial B)$. Für $\lambda \geq \max \left\{ \frac{D(\tilde{X})+2}{\mu_0 h(\frac{\mu_0}{2})}, \int_{\partial B} (|\tilde{X}_\varphi|^2 + \varrho |\tilde{X} - P|^2) \right\}$ und alle k folgt also

$$\begin{aligned} F_\lambda(X_k) &\geq \lambda \int_{\partial B} G(X_k)^2 \sqrt{|(X_k)_\varphi|^2 + \frac{1}{\lambda}} \geq \lambda \mu_0 h \left(\frac{\mu_0}{2} \right) \geq D(\tilde{X}) + 2 \\ &\geq D(\tilde{X}) + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial B} (|\tilde{X}_\varphi|^2 + \varrho |\tilde{X} - P|^2) + 1 = F_\lambda(\tilde{X}) + 1 \geq e_\lambda + 1 \end{aligned}$$

im Widerspruch dazu, dass X_k Minimalfolge ist. Unsere Annahme war also falsch und es gilt $X_k(\partial B) \subset T_{\mu_0}$ für alle $k > k_0(\lambda)$.

Da X_k schwach in $H_2^1(B)$ gegen X konvergiert, konvergieren die Randwerte $X_k|_{\partial B}$ stark in $L_2(\partial B)$ gegen $X|_{\partial B}$. Es gibt also eine Teilfolge, die fast überall punktweise konvergiert und wir erhalten $X|_{\partial B}(w) \in \overline{T_{\mu_0}}$ für fast alle $w \in \partial B$. Da $X|_{\partial B}$ stetig ist, gilt $X(\partial B) \subset \overline{T_{\mu_0}}$. \square

Wir geben hier noch kurz ein wichtiges Corollar an, das wir später benötigen. Mit ihm kann eine direkte Verbindung zwischen unserer Methode und der in Kapitel 1 behandelten klassischen Theorie hergestellt werden. (Siehe Beweis von Satz 9.)

Corollar 7 *Sei $0 < \mu_0 < \mu$ beliebig, \tilde{X} eine Lösung von $\mathcal{P}(\Pi, S)$ und $\lambda \geq \max \left\{ \frac{D(\tilde{X})+2}{\mu_0 h(\frac{\mu_0}{2})}, \int_{\partial B} (|\tilde{X}_\varphi|^2 + \varrho |\tilde{X} - P|^2) \right\}$. Weiter sei X_λ eine Lösung von \mathcal{P}_λ . Dann gilt $X_\lambda(\partial B) \subset \overline{T_{\mu_0}}$.*

Beweis: Dies folgt sofort aus Lemma 6 mit der konstanten Folge $X_k := X_\lambda$ für alle k . \square

Nach Lemma 6 gilt nun also $X(\partial B) \subset \overline{T_{\mu_0}} \subset T_\mu$, falls λ groß genug ist. Weiter gilt nach Hölderungleichung

$$\begin{aligned} |X_k(\varphi_2) - X_k(\varphi_1)| &\leq \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |(X_k)_\varphi| \leq \sqrt{\varphi_2 - \varphi_1} \sqrt{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |(X_k)_\varphi|^2} \\ &\leq \sqrt{\varphi_2 - \varphi_1} \sqrt{\lambda M_\lambda}. \end{aligned}$$

Also sind die $X_k|_{\partial B}$ gleichgradig stetig und wegen $X_k(\partial B) \subset T_\mu$ auch gleichmäßig beschränkt. Nach Arzelà-Ascoli (siehe z.B. [1], Satz 2.11) gibt es demnach eine weitere Teilfolge X_k , die auf ∂B gleichmäßig konvergiert. Wegen $L(X_k|_{\partial B}, \Pi) \neq 0$ für alle k folgt damit $L(X|_{\partial B}, \Pi) \neq 0$, also $X \in \mathcal{C}$ und damit

$$e_\lambda \leq F_\lambda(X).$$

Wir benutzen nun ein wohlbekanntes Unterhalbstetigkeitsresultat (für einen Beweis siehe z.B. Theorem 1.8.2 in [15]):

Lemma 8 Sei $f(x, z, p) \in C^0(\mathbb{R}^n, U, \mathbb{R}^{nN})$, wobei $U \subset \mathbb{R}^N$. Sei f konvex in p für alle (x, z) , $f(x, z, p) \geq 0$ für alle (x, z, p) und $f_p \in C^0(\mathbb{R}^n, U, \mathbb{R}^{nN})$. Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ gelte $z_k(G), z(G) \subset U$ und $z_k \rightarrow z$ in $H_1^1(G)$. Dann folgt

$$\int_G f(x, z, \nabla z) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_G f(x, z_k, \nabla z_k) dx.$$

Wir wenden dieses Lemma auf $n = 1$, $N = 3$ und $f(x, z, p) = \lambda G(z)^2 \sqrt{|p|^2 + \frac{1}{\lambda}} + \frac{1}{\lambda} (|p|^2 + \varrho(x)|z - P|^2)$ an und erhalten zusammen mit der Unterhalbstetigkeit des Dirichletintegrals (die mit $n = 2$, $N = 3$ und $f(x, z, p) = |p|^2$ auch aus dem Lemma folgt)

$$F_\lambda(X) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F_\lambda(X_k) = e_\lambda$$

und damit $F_\lambda(X) = e_\lambda$. Folglich ist X die gesuchte Lösung von \mathcal{P}_λ .

Jede Lösung X von \mathcal{P}_λ ist ein Minimum des Dirichletintegrals unter allen Variationen mit kompaktem Träger in B , da sich in diesem Fall die Randintegrale nicht ändern. Also ist X eine schwache Lösung der Laplacegleichung und nach einem Standardregularitätsresultat (siehe z.B. [12], Corollary 8.11.) auch eine klassische Lösung. Folglich sind alle Lösungen harmonische Funktionen.

4 Konvergenz für $\lambda \rightarrow \infty$

Die ursprüngliche Problemstellung war, numerische Lösungen des freien Randwertproblems zu erhalten. Wir müssen also noch untersuchen, wie die Lösungen von \mathcal{P}_λ mit denen von $\mathcal{P}(\Pi, S)$ zusammenhängen und in der Tat erhalten wir den gewünschten Konvergenzsatz. Der Beweis ist vergleichsweise einfach, denn wir können mit Hilfe von Corollar 7 die Aussage auf die bekannte Theorie von Minimalflächen mit freien Rändern (siehe Kapitel 1) zurückführen.

Satz 9 *Sei \tilde{X} eine Lösung des freien Randwertproblems $\mathcal{P}(\Pi, S)$ und seien X_{λ_n} Lösungen der Probleme \mathcal{P}_{λ_n} , wobei $\lambda_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(X_{\lambda_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\lambda_n}(X_{\lambda_n}) = D(\tilde{X})$$

und es gibt eine Teilfolge von X_{λ_n} , die in $H_2^1(B)$ und gleichmäßig auf jeder Teilmenge $\Omega \subset\subset B$ gegen eine (evtl. andere) Lösung von $\mathcal{P}(\Pi, S)$ konvergiert.

Beweis: Da $\tilde{X} \in \mathcal{C}$ nach Satz 4, gilt

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} D(X_{\lambda_n}) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{\lambda_n}(X_{\lambda_n}) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{\lambda_n}(\tilde{X}) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(D(\tilde{X}) + \frac{1}{\lambda_n} \int_{\partial B} (|\tilde{X}_\varphi|^2 + \varrho |\tilde{X} - P|^2) \right) = D(\tilde{X}). \end{aligned} \quad (4)$$

Für alle $n \geq N_0$ gilt $\lambda_n > \max \left\{ \frac{D(\tilde{X})+2}{\mu h(\frac{\mu}{2})}, \int_{\partial B} (|\tilde{X}_\varphi|^2 + \varrho |\tilde{X} - P|^2) \right\}$. Aus den Eigenschaften der Funktion h folgt, dass die Funktion $f(\tau) := \frac{D(\tilde{X})+2}{\tau h(\frac{\tau}{2})}$ auf $(0, \mu]$ stetig und streng monoton fallend ist. Außerdem gilt $\lim_{\tau \rightarrow 0} f(\tau) = \infty$, also existiert zu jedem $n \geq N_0$ genau ein $\mu_0 = \mu_0(n) < \mu$ mit $\lambda_n = f(\mu_0)$. Es folgt $\lambda_n = \max \left\{ \frac{D(\tilde{X})+2}{\mu_0 h(\frac{\mu_0}{2})}, \int_{\partial B} (|\tilde{X}_\varphi|^2 + \varrho |\tilde{X} - P|^2) \right\}$. Nach Corollar 7 gilt demnach $X_{\lambda_n}(\partial B) \subset \overline{T_{\mu_0}}$, d.h. $X_{\lambda_n} \in \mathcal{C}(\Pi, \overline{T_{\mu_0(n)}})$ für alle $n \geq N_0$.

Für die folgende Argumentation verwenden wir viele Begriffe aus dem Beweis von Satz 1, ohne jedesmal wieder darauf zu verweisen. Wir setzen die dortigen Definitionen hier voraus.

Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_0(n) = 0$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\overline{T_{\mu_0(n)}}, S) = 0$. Das heißt X_{λ_n} ist eine „generalized admissible sequence“ zu $\mathcal{P}(\Pi, S)$ und es folgt

$$D(\tilde{X}) = e = e^* \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} D(X_{\lambda_n}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{\lambda_n}(X_{\lambda_n}). \quad (5)$$

Die Abschätzungen (4) und (5) ergeben zusammen die erste Behauptung.

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} D(X_{\lambda_n}) = D(\tilde{X}) = e$ bilden die harmonischen Funktionen X_{λ_n} demnach eine „generalized minimizing sequence“. Also folgt nach Lemma 3, dass es eine Teilfolge von X_{λ_n} gibt, die schwach in $H_2^1(B)$ und gleichmäßig auf jeder Teilmenge $\Omega \subset\subset B$ gegen eine Lösung von $\mathcal{P}(\Pi, S)$ konvergiert. Aus der schwachen Konvergenz in $H_2^1(B)$ folgt starke Konvergenz in $L_2(B)$ und da die Dirichletintegrale konvergieren, folgt auch die starke $H_2^1(B)$ -Konvergenz. (Siehe z.B. Übung U6.5 in [1].) \square

5 Konvergenzordnung

Für numerische Zwecke ist es natürlich interessant, die Konvergenzordnung in Satz 9 zu ermitteln. Zumindest für die Funktionalwerte können wir dies erreichen, indem wir die grundlegende Beweisidee mit rein quantitativen Argumenten durchführen. Dazu schätzen wir die Differenz der Funktionalwerte gegen die Fläche einer explizit konstruierten Vergleichsfunktion ab. Mit Methoden der Differentialgeometrie können wir diese wiederum weiter abschätzen.

Wir beschränken uns hier auf den Fall, dass G die signierte Distanzfunktion ist.

Satz 10 *Sei G die signierte Distanzfunktion zu S , \tilde{X} eine Lösung von $\mathcal{P}(\Pi, S)$, $\lambda > \max \left\{ \frac{4}{\mu^3}(D(\tilde{X}) + 2), \int_{\partial B} (|\tilde{X}_\varphi|^2 + \varrho|\tilde{X} - P|^2) \right\}$ und X_λ eine Lösung von \mathcal{P}_λ . Dann gilt*

$$|D(\tilde{X}) - D(X_\lambda)| \leq \frac{C}{\sqrt[3]{\lambda}}, \quad |D(\tilde{X}) - F_\lambda(X_\lambda)| \leq \frac{C}{\sqrt[3]{\lambda}},$$

wobei C nicht von λ abhängt.

Bemerkung: Falls G allgemeiner eine Funktion mit polynomielltem Wachstum der Ordnung n ist, erhält man mit der gleichen Argumentation die Konvergenzordnung $\frac{1}{2n+1}$.

Beweis: Zunächst gilt

$$\begin{aligned} D(X_\lambda) - D(\tilde{X}) &\leq F_\lambda(X_\lambda) - D(\tilde{X}) \leq F_\lambda(\tilde{X}) - D(\tilde{X}) \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\partial B} (|\tilde{X}_\varphi|^2 + \varrho|\tilde{X} - P|^2) = \frac{C_1}{\lambda}. \end{aligned} \quad (6)$$

Sei $\mu_0 := \sqrt[3]{\frac{4}{\lambda}(D(\tilde{X}) + 2)}$ und \tilde{Y}_{μ_0} eine Lösung des Problems $\mathcal{P}(\Pi, \overline{T_{\mu_0}})$. (Diese existiert nach Satz 1, da die abgeschlossene Menge $\overline{T_{\mu_0}}$ wegen $\mu_0 < \mu$ Voraussetzung A erfüllt und $\tilde{X} \in \mathcal{C}(\Pi, \overline{T_{\mu_0}})$ gilt.) Nach Definition von μ_0 haben wir $\lambda \geq \max \left\{ \frac{4}{\mu_0^3}(D(\tilde{X}) + 2), \int_{\partial B} (|\tilde{X}_\varphi|^2 + \varrho|\tilde{X} - P|^2) \right\}$, also $X_\lambda(\partial B) \subset \overline{T_{\mu_0}}$ bzw. $X_\lambda \in \mathcal{C}(\Pi, \overline{T_{\mu_0}})$ nach Corollar 7 und es folgt

$$D(\tilde{X}) - F_\lambda(X_\lambda) \leq D(\tilde{X}) - D(X_\lambda) \leq D(\tilde{X}) - D(\tilde{Y}_{\mu_0}). \quad (7)$$

Da \tilde{X} und \tilde{Y}_{μ_0} nach Satz 1 Minimalflächen sind, gilt

$$D(\tilde{X}) - D(\tilde{Y}_{\mu_0}) = A(\tilde{X}) - A(\tilde{Y}_{\mu_0}). \quad (8)$$

Um diesen Term weiter abschätzen zu können, müssen wir zeigen, dass \tilde{Y}_{μ_0} auch eine Lösung des Problems $\mathcal{P}(\Pi, \partial T_{\mu_0})$ ist.

Da die abgeschlossene Menge $\overline{T_{\mu_0}}$ eine Bogen-Sehnen-Bedingung erfüllt, gilt $\tilde{Y}_{\mu_0} \in C^0(\overline{B})$ (siehe Kapitel 2.5, Theorem 4 in [6]). Angenommen, es gäbe einen Punkt $w \in \partial B$ mit $\tilde{Y}_{\mu_0}(w) \in T_{\mu_0}$. Dann folgt aus der Stetigkeit, dass ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass $\tilde{Y}_{\mu_0}(B \cap B_\epsilon(w)) \in T_{\mu_0}$. Da \tilde{Y}_{μ_0} eine nicht konstante Minimalfläche ist, gilt $D_{B \cap B_\epsilon(w)}(\tilde{Y}_{\mu_0}) > 0$. (Dies folgt aus dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen (Siehe [11], Kapitel III, Satz 3.2.), da jede Minimalfläche Realteil einer holomorphen Funktion ist.)

Wählen wir nun gemäß dem Riemannschen Abbildungssatz (Siehe [11], Kapitel IV, Satz 4.5.) eine konforme Abbildung σ von B nach $B \setminus \overline{B_\epsilon(w)}$, so erhalten wir wegen $D_{B \setminus \overline{B_\epsilon(w)}}(\tilde{Y}_{\mu_0}) = D_B(\tilde{Y}_{\mu_0}(\sigma))$ eine Funktion $\tilde{Y}_{\mu_0}(\sigma) \in \mathcal{C}(\Pi, \overline{T_{\mu_0}})$ mit $D(\tilde{Y}_{\mu_0}(\sigma)) < D(\tilde{Y}_{\mu_0})$, was nicht möglich ist. Also kann \tilde{Y}_{μ_0} keine Randwerte in T_{μ_0} haben und wir erhalten $\tilde{Y}_{\mu_0}(\partial B) \subset \partial T_{\mu_0}$.

Damit ist $\tilde{Y}_{\mu_0}(\partial B)$ wegen der Stetigkeit auch in einer einzigen Zusammenhangskomponente von ∂T_{μ_0} enthalten, die wir mit $\partial T_{\mu_0}^1$ bezeichnen. Diese ist eine Parallelfäche zu S im Abstand $\mu_0 < \mu$, also nach Wahl von μ in Kapitel 2 eine kompakte Untermannigfaltigkeit der Klasse C^3 . Insbesondere folgt daraus nach Satz 4, dass $\tilde{Y}_{\mu_0} \in C^2(\overline{B})$. Wir definieren nun eine Abbildung Y_{μ_0} durch

$$Y_{\mu_0} = \begin{cases} \tilde{Y}_{\mu_0}(2r, \varphi) & \text{in } B_{\frac{1}{2}} \\ \tilde{Y}_{\mu_0}(1, \varphi) + \mu_0(2r - 1)N(\tilde{Y}_{\mu_0}(1, \varphi)) & \text{in } B \setminus B_{\frac{1}{2}} \end{cases},$$

wobei N die innere Normale an $\partial T_{\mu_0}^1$ bezeichnet. Nach Konstruktion gilt $Y_{\mu_0} \in C^2(\overline{B_{\frac{1}{2}}}) \cap C^2(\overline{B \setminus B_{\frac{1}{2}}}) \cap C^0(\overline{B})$, also $Y_{\mu_0} \in \mathcal{C}(\Pi, S)$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} A(\tilde{X}) - A(\tilde{Y}_{\mu_0}) &= A(\tilde{X}) - A_{B_{1/2}}(Y_{\mu_0}) = A(\tilde{X}) - A(Y_{\mu_0}) + A_{B \setminus B_{1/2}}(Y_{\mu_0}) \\ &\leq A_{B \setminus B_{1/2}}(Y_{\mu_0}), \end{aligned} \quad (9)$$

da \tilde{X} nach Satz 1 auch das Areafunktional minimiert. Wir bezeichnen die Hauptkrümmungen an S mit κ_i , $i = 1, 2$. Nach Wahl von μ sind deren Beträge durch $\frac{1}{2\mu}$ beschränkt. Für die Hauptkrümmungen $\tilde{\kappa}_i$ der Parallelfäche im Abstand $\mu_0 \in [0, \mu]$ gilt

$$\tilde{\kappa}_i = \frac{\kappa_i}{1 \pm \kappa_i \mu_0},$$

je nach Wahl der Orientierung. (Siehe z.B. Kapitel 14.6. in [12].) Wir haben also

$$|\tilde{\kappa}_i| \leq \frac{|\kappa_i|}{1 - |\kappa_i \mu_0|} \leq \frac{1}{2\mu \left(1 - \frac{|\mu_0|}{2\mu}\right)} \leq \frac{1}{\mu}.$$

Die Beträge der Hauptkrümmungen von $\partial T_{\mu_0}^1$ sind also durch $\frac{1}{\mu}$ beschränkt. Mit $\gamma(\varphi) := \tilde{Y}_{\mu_0}(1, \varphi)$ gilt für alle $r \in (\frac{1}{2}, 1)$:

$$(Y_{\mu_0})_r = 2\mu_0 N(\gamma(\varphi)), \quad (Y_{\mu_0})_\varphi = \gamma'(\varphi) + \mu_0(2r - 1)\langle \nabla N(\gamma(\varphi)), \gamma'(\varphi) \rangle.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} A_{B \setminus B_{1/2}}(Y_{\mu_0}) &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{2}}^1 |(Y_{\mu_0})_r \times (Y_{\mu_0})_\varphi| dr d\varphi \\ &\leq \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{2}}^1 |(Y_{\mu_0})_r| |(Y_{\mu_0})_\varphi| dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{2}}^1 2\mu_0 |\gamma'(\varphi) + \mu_0(2r - 1)\langle \nabla N(\gamma(\varphi)), \gamma'(\varphi) \rangle| dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{2}}^1 2\mu_0 \left(|\gamma'(\varphi)|^2 + 2\mu_0(2r - 1)\langle \gamma'(\varphi), \nabla N(\gamma(\varphi)) \cdot \gamma'(\varphi) \rangle \right) dr d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mu_0^2 (2r-1)^2 \langle \nabla N(\gamma(\varphi)), \gamma'(\varphi) \rangle^2 \Big)^{\frac{1}{2}} dr d\varphi \\
& \leq \int_0^{2\pi} \mu_0 \left(|\gamma'(\varphi)|^2 + 2\mu_0 |\langle \gamma'(\varphi), \nabla N(\gamma(\varphi)) \cdot \gamma'(\varphi) \rangle| \right. \\
& \quad \left. + \mu_0^2 \langle \nabla N(\gamma(\varphi)), \gamma'(\varphi) \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\varphi.
\end{aligned}$$

Je nach Wahl der Orientierung der $\tilde{\kappa}_i$ ist hier $\pm \nabla N$ die Weingartenabbildung von $\partial T_{\mu_0}^1$. Zwischen den drei Fundamentalformen besteht der Zusammenhang $KI - 2HIII + III = 0$ (Siehe z.B. [4], Kapitel 1.2, Gleichung (28).) und folglich $III \leq |K|I + 2|H||II|$. Wir erhalten

$$\langle \nabla N(\gamma(\varphi)), \gamma'(\varphi) \rangle^2 \leq |\tilde{\kappa}_1 \tilde{\kappa}_2| |\gamma'(\varphi)|^2 + |\tilde{\kappa}_1 + \tilde{\kappa}_2| |\langle \gamma'(\varphi), \nabla N(\gamma(\varphi)) \cdot \gamma'(\varphi) \rangle|,$$

also folgt mit $|\tilde{\kappa}_1|, |\tilde{\kappa}_2| \leq \frac{1}{\mu}$ und $\mu_0 < \mu$:

$$\begin{aligned}
A_{B \setminus B_{1/2}}(Y_{\mu_0}) & \leq \int_0^{2\pi} \mu_0 \left((1 + \mu_0^2 |\tilde{\kappa}_1 \tilde{\kappa}_2|) |\gamma'(\varphi)|^2 \right. \\
& \quad \left. + (2\mu_0 + \mu_0^2 |\tilde{\kappa}_1 + \tilde{\kappa}_2|) |\langle \gamma'(\varphi), \nabla N(\gamma(\varphi)) \cdot \gamma'(\varphi) \rangle| \right)^{\frac{1}{2}} d\varphi \\
& \leq \int_0^{2\pi} \mu_0 \left(2|\gamma'(\varphi)|^2 + 4\mu_0 |\langle \gamma'(\varphi), \nabla N(\gamma(\varphi)) \cdot \gamma'(\varphi) \rangle| \right)^{\frac{1}{2}} d\varphi.
\end{aligned}$$

Für $\gamma'(\varphi) \neq 0$ gilt

$$|\langle \gamma'(\varphi), \nabla N(\gamma(\varphi)) \cdot \gamma'(\varphi) \rangle| = \frac{|\langle \gamma'(\varphi), \nabla N(\gamma(\varphi)) \cdot \gamma'(\varphi) \rangle|}{|\gamma'(\varphi)|^2} |\gamma'(\varphi)|^2 \leq \frac{1}{\mu} |\gamma'(\varphi)|^2,$$

da die Normalkrümmung nach Definition der Hauptkrümmungen durch diese beschränkt ist. (Siehe [4], Kapitel 1.2, Definitionen (20) und (21).) Für $\gamma'(\varphi) = 0$ ist dies trivialerweise richtig und es folgt

$$\begin{aligned}
A_{B \setminus B_{1/2}}(Y_{\mu_0}) & \leq \int_0^{2\pi} \mu_0 (6|\gamma'(\varphi)|^2)^{\frac{1}{2}} d\varphi = \sqrt{6}\mu_0 \int_0^{2\pi} |\gamma'(\varphi)| d\varphi \\
& = \sqrt{6}\mu_0 l(\gamma) = \sqrt{6}\mu_0 l(\tilde{Y}_{\mu_0}|_{\partial B}).
\end{aligned} \tag{10}$$

Nach Kapitel 4.6, Remark 10 in [6] gilt die Ungleichung

$$l(\tilde{Y}_{\mu_0}|_{\partial B}) \leq \frac{2}{\mu} D(\tilde{Y}_{\mu_0}), \tag{11}$$

da $\partial T_{\mu_0}^1$ eine „ μ -sphere condition“ erfüllt. Mit (7), (8), (9), (10) und (11) folgt demnach insgesamt unter nochmaliger Anwendung von $D(\tilde{Y}_{\mu_0}) \leq D(X_\lambda)$

$$\begin{aligned}
D(\tilde{X}) - F_\lambda(X_\lambda) & \leq D(\tilde{X}) - D(X_\lambda) \leq 2\sqrt{6} \frac{\mu_0}{\mu} D(\tilde{Y}_{\mu_0}) \\
& \leq 2\sqrt{6} \frac{\mu_0}{\mu} D(X_\lambda) \leq 2\sqrt{6} \frac{\mu_0}{\mu} F_\lambda(X_\lambda) \leq 2\sqrt{6} \frac{\mu_0}{\mu} F_\lambda(\tilde{X}) \\
& \leq 2\sqrt{6} \frac{\mu_0}{\mu} \left(D(\tilde{X}) + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial B} (|\tilde{X}_\varphi|^2 + \varrho |\tilde{X} - P|^2) \right) \\
& \leq 2\sqrt{6} \frac{\mu_0}{\mu} (D(\tilde{X}) + 1) = \frac{2\sqrt{6}}{\mu} \sqrt[3]{\frac{4}{\lambda} (D(\tilde{X}) + 2)} (D(\tilde{X}) + 1) = \frac{C_2}{\sqrt[3]{\lambda}}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Mit $C = \max \left\{ C_1 \left(\max \left\{ \frac{4}{\mu^3} (D(\tilde{X}) + 2), \int_{\partial B} (|\tilde{X}_\varphi|^2 + \varrho |\tilde{X} - P|^2) \right\} \right)^{-\frac{2}{3}}, C_2 \right\}$
 folgt die Behauptung aus (6) und (12). \square

6 Sobolevräume fraktionaler Ordnung

An dieser Stelle müssen wir einen Ausflug in die Theorie der Sobolevräume fraktionaler Ordnung machen. Die folgende kurze Zusammenstellung der für uns wichtigen Definitionen und Resultate übernehmen wir aus Kapitel 3 in [8]: Die Räume $H_2^s(\partial B)$ und $H_2^s(B)$ können für alle reellen s definiert werden, aber abgesehen vom klassischen Fall $s \in \mathbb{N}$ (und $H_2^0 := L_2$) benötigen wir nur die folgenden Fälle.

Für $f: \partial B \mapsto \mathbb{R}$ definieren wir die $H_2^{1/2}(\partial B)$ -Seminorm durch

$$|f|_{H_2^{1/2}(\partial B)}^2 = \int_{\partial B} \int_{\partial B} \frac{|f(\varphi) - f(\tilde{\varphi})|^2}{|\varphi - \tilde{\varphi}|^2} d\varphi d\tilde{\varphi}$$

und für $u: B \mapsto \mathbb{R}$ definieren wir die $H_2^{1/2}(B)$ -Seminorm durch

$$|u|_{H_2^{1/2}(B)}^2 = \int_B \int_B \frac{|u(x) - u(\tilde{x})|^2}{|x - \tilde{x}|^3} dx d\tilde{x}.$$

In beiden Fällen ist die zugehörige Norm definiert durch

$$\|\cdot\|_{H_2^{1/2}}^2 = \|\cdot\|_{L_2}^2 + |\cdot|_{H_2^{1/2}}^2.$$

Weiter haben wir

$$|f|_{H_2^{3/2}(\partial B)} = |f_\varphi|_{H_2^{1/2}(\partial B)}, \quad |u|_{H_2^{3/2}(B)} = |\nabla u|_{H_2^{1/2}(B)}$$

und

$$\|\cdot\|_{H_2^{3/2}}^2 = \|\cdot\|_{H_2^1}^2 + |\cdot|_{H_2^{3/2}}^2.$$

Sei $u \in H_2^{s+1/2}(B)$ mit $s \in \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$, dann hat u eine wohldefinierte Spur f auf ∂B und es gilt

$$\|f\|_{H_2^s(\partial B)} \leq c \|u\|_{H_2^{s+1/2}(B)}.$$

(Siehe Kapitel 1, Abschnitt 9.2 in [14].) Dies ist im Allgemeinen falsch für $s = 0$, falls aber für eine Funktion $u \in H_2^{1/2}(B)$ zusätzlich $\Delta u \in L_2(B)$ gilt, dann hat u wieder eine Spur f auf ∂B mit

$$\|f\|_{L_2(\partial B)} \leq c \left(\|u\|_{H_2^{1/2}(B)} + \|\Delta u\|_{L_2(B)} \right). \quad (13)$$

(Siehe Kapitel 2, Abschnitt 7.3, Theorem 7.3 in [14].) Falls umgekehrt $f \in H_2^s(\partial B)$ mit $s \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$, dann existiert eine eindeutige auf B definierte harmonische Funktion $\Phi(f)$ mit Spur f wie oben und

$$\|\Phi(f)\|_{H_2^{s+1/2}(B)} \leq c \|f\|_{H_2^s(\partial B)}. \quad (14)$$

(Siehe Kapitel 2, Abschnitt 7.3, Theorem 7.4 in [14]. Für $s \in \{1, \frac{3}{2}\}$ folgt die Existenz auch bereits aus Lemma 2.)

Wir können nun folgendes Resultat beweisen, das wir im nächsten Kapitel benötigen:

Lemma 11 Sei $u \in H_2^1(B) \cap H_2^1(\partial B)$ eine harmonische Funktion. Dann besitzen die Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ L_2 -Spuren auf ∂B und es gilt

$$\int_B \nabla u \cdot \nabla \Psi = \int_{\partial B} \nabla u \cdot \nu \Psi$$

für alle $\Psi \in C^\infty(\overline{B})$, wobei ν die äußere Normale an ∂B ist.

Beweis: Da $u|_{\partial B} \in H_2^1$, gilt nach (14) wegen der Eindeutigkeit der harmonischen Fortsetzung $u \in H_2^{3/2}(B)$. Für die Ableitungen gilt also $\frac{\partial u}{\partial x} \in H_2^{1/2}(B)$ und $\frac{\partial u}{\partial y} \in H_2^{1/2}(B)$. Diese sind außerdem wieder harmonische Funktionen, nach (13) besitzen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ also L_2 -Spuren auf ∂B . Wählen wir nun eine Folge von Funktionen $g_k \in C^\infty(\partial B)$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - g_k\|_{H_2^1(\partial B)} = 0$, dann gilt wegen der Linearität von Φ und (14)

$$\|\nabla u - \nabla \Phi(g_k)\|_{H_2^{1/2}(B)} \leq \|u - \Phi(g_k)\|_{H_2^{3/2}(B)} \leq c \|u - g_k\|_{H_2^1(\partial B)}.$$

Es folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla u - \nabla \Phi(g_k)\|_{L_2(B)} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla u - \nabla \Phi(g_k)\|_{H_2^{1/2}(B)} = 0$. Weiterhin haben wir aufgrund der Linearität des Spurooperators und (13)

$$\|\nabla u \cdot \nu - \nabla \Phi(g_k) \cdot \nu\|_{L_2(\partial B)} \leq \|\nabla u - \nabla \Phi(g_k)\|_{L_2(\partial B)} \leq c \|\nabla u - \nabla \Phi(g_k)\|_{H_2^{1/2}(B)}$$

und folglich $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla u \cdot \nu - \nabla \Phi(g_k) \cdot \nu\|_{L_2(\partial B)} = 0$. Es gilt

$$\int_B \nabla \Phi(g_k) \cdot \nabla \Psi = \int_{\partial B} \nabla \Phi(g_k) \cdot \nu \Psi$$

für alle $\Psi \in C^\infty(\overline{B})$, die Behauptung folgt also durch Approximation. \square

7 Regularität

Im numerischen Teil dieser Arbeit werden wir Interpolations-Abschätzungen durchführen, für die wir eine höhere Regularität der Randwerte der Lösungen X_λ von \mathcal{P}_λ benötigen, als die durch das Funktional F_λ vorgegebene. Wir wollen nun beweisen, dass dies tatsächlich gerechtfertigt ist, da die Randwerte $X_\lambda|_{\partial B}$ in C^2 sind. Dazu zeigen wir zuerst, dass $(X_\lambda)_\varphi$ Hölderstetig ist, indem wir die natürlichen Randbedingungen herleiten und mit Hilfe einer speziellen Variante des Satzes über implizite Funktionen nach $(X_\lambda)_\varphi$ auflösen. Mit einem einfachen Bootstrap-Argument erhalten wir schließlich die gewünschte Regularität.

Lemma 12 *Sei X_λ eine Lösung von \mathcal{P}_λ , dann gibt es eine Funktion $f \in H_2^1(\partial B, \mathbb{R}^3)$, so dass*

$$\frac{\lambda G(X_\lambda)^2 (X_\lambda)_\varphi}{\sqrt{|(X_\lambda)_\varphi|^2 + \frac{1}{\lambda}}} + \frac{2}{\lambda} (X_\lambda)_\varphi = f \quad (15)$$

fast überall auf ∂B . Falls zusätzlich $(X_\lambda)_\varphi \in C^{0, \frac{1}{2}}(\partial B)$ gilt, folgt sogar $f \in C^{1, \frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}^3)$.

Beweis: Sei $\Psi \in C^\infty(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} F_\lambda(X_\lambda + t\Psi) \Big|_{t=0} = \int_B \langle \nabla X_\lambda, \nabla \Psi \rangle \\ &\quad + \lambda \int_{\partial B} \left(G(X_\lambda)^2 \frac{\langle (X_\lambda)_\varphi, \Psi_\varphi \rangle}{\sqrt{|(X_\lambda)_\varphi|^2 + \frac{1}{\lambda}}} + 2G(X_\lambda) \langle \nabla G(X_\lambda), \Psi \rangle \sqrt{|(X_\lambda)_\varphi|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right) \\ &\quad + \frac{2}{\lambda} \int_{\partial B} (\langle (X_\lambda)_\varphi, \Psi_\varphi \rangle + \langle \varrho(X_\lambda - P), \Psi \rangle). \end{aligned}$$

Da $X_\lambda \in H_2^1(B, \mathbb{R}^3) \cap H_2^1(\partial B, \mathbb{R}^3)$ nach Satz 5 eine harmonische Funktion ist, folgt nach Lemma 11:

$$\int_B \langle \nabla X_\lambda, \nabla \Psi \rangle = \int_{\partial B} \langle \nabla X_\lambda \cdot \nu, \Psi \rangle =: \int_{\partial B} \langle (X_\lambda)_r, \Psi \rangle.$$

Also folgt

$$\begin{aligned} &\int_{\partial B} \left(\langle (X_\lambda)_r, \Psi \rangle + 2\lambda G(X_\lambda) \sqrt{|(X_\lambda)_\varphi|^2 + \frac{1}{\lambda}} \langle \nabla G(X_\lambda), \Psi \rangle + \frac{2}{\lambda} \langle \varrho(X_\lambda - P), \Psi \rangle \right) \\ &+ \lambda \int_{\partial B} G(X_\lambda)^2 \frac{\langle (X_\lambda)_\varphi, \Psi_\varphi \rangle}{\sqrt{|(X_\lambda)_\varphi|^2 + \frac{1}{\lambda}}} + \frac{2}{\lambda} \int_{\partial B} \langle (X_\lambda)_\varphi, \Psi_\varphi \rangle = 0. \end{aligned}$$

Partielle Integration über das Intervall $[\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi]$ ergibt für alle Ψ mit $\Psi|_{\partial B} \in C_c^\infty(\partial B \setminus \{\varphi_0\}, \mathbb{R}^3)$

$$- \int_{\partial B} \left\langle \int_{\varphi_0}^\varphi (X_\lambda)_r + 2\lambda G(X_\lambda) \sqrt{|(X_\lambda)_\varphi|^2 + \frac{1}{\lambda}} \nabla G(X_\lambda) + \frac{2}{\lambda} \varrho(X_\lambda - P) d\tilde{\varphi}, \Psi_\varphi \right\rangle$$

$$+ \lambda \int_{\partial B} G(X_\lambda)^2 \frac{\langle (X_\lambda)_\varphi, \Psi_\varphi \rangle}{\sqrt{|(X_\lambda)_\varphi|^2 + \frac{1}{\lambda}}} + \frac{2}{\lambda} \int_{\partial B} \langle (X_\lambda)_\varphi, \Psi_\varphi \rangle = 0.$$

(Beachte, das die Stammfunktion einer periodischen Funktion zuerst einmal nicht periodisch sein muss.) Nach dem Lemma von Du Bois-Reymond gibt es also eine Konstante $C(\varphi_0) \in \mathbb{R}^3$, so dass

$$\begin{aligned} & - \int_{\varphi_0}^{\varphi} (X_\lambda)_r + 2\lambda G(X_\lambda) \sqrt{|(X_\lambda)_\varphi|^2 + \frac{1}{\lambda}} \nabla G(X_\lambda) + \frac{2}{\lambda} \varrho(X_\lambda - P) d\tilde{\varphi} \\ & + \lambda G(X_\lambda)^2 \frac{(X_\lambda)_\varphi}{\sqrt{|(X_\lambda)_\varphi|^2 + \frac{1}{\lambda}}} + \frac{2}{\lambda} (X_\lambda)_\varphi = C(\varphi_0) \end{aligned}$$

fast überall auf $[\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi]$. Wir setzen demnach

$$f_{\varphi_0} = C(\varphi_0) + \int_{\varphi_0}^{\varphi} (X_\lambda)_r + 2\lambda G(X_\lambda) \sqrt{|(X_\lambda)_\varphi|^2 + \frac{1}{\lambda}} \nabla G(X_\lambda) + \frac{2}{\lambda} \varrho(X_\lambda - P) d\tilde{\varphi}.$$

Dann erfüllt f_{φ_0} fast überall auf ∂B die behauptete Gleichung (15) und es gilt $f_{\varphi_0} \in H_2^1(\partial B \setminus \{\varphi_0\}, \mathbb{R}^3)$, da der Integrand in $L_2(\partial B)$ ist. Da φ_0 beliebig war, können wir z.B. die Funktionen f_0 und f_π betrachten. Diese stimmen fast überall auf ∂B überein, da sie dort jeweils Gleichung (15) erfüllen, und folglich gilt $f_0 = f_\pi =: f \in H_2^1(\partial B, \mathbb{R}^3)$.

Gilt zusätzlich $(X_\lambda)_\varphi \in C^{0, \frac{1}{2}}(\partial B)$, heißt das, die harmonische Funktion X_λ hat $C^{1, \frac{1}{2}}$ -Randwerte. Folglich gilt auch $X_\lambda \in C^{1, \frac{1}{2}}(\overline{B})$. (Siehe Satz 8.34. und Lemma 6.38. in [12].) Damit haben wir auch $(X_\lambda)_r \in C^{0, \frac{1}{2}}(\partial B)$, also $f_{\varphi_0} \in C^{1, \frac{1}{2}}(\partial B \setminus \{\varphi_0\}, \mathbb{R}^3)$ und mit dem gleichen Argument wie oben folgt $f_{\varphi_0} := f \in C^{1, \frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}^3)$. \square

Um die Regularität von X_λ zu zeigen, müssen wir die Gleichung nach $(X_\lambda)_\varphi$ auflösen. Dazu benutzen wir folgende Version des Satzes über implizite Funktionen: (Mit der Norm einer Matrix ist hier immer die Operatornorm gemeint.)

Satz 13 Sei $F(x, y): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig, nach y stetig differenzierbar und es gelte $|F|_{C^{0, \alpha}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)} < \infty$. Sei $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ ein Punkt mit $\det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ und $F(a, b) = 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung $V_1 \subset \mathbb{R}$ von a , eine Umgebung $V_2 \subset \mathbb{R}^m$ von b sowie eine eindeutig bestimmte Abbildung $g \in C^0(V_1, V_2)$ mit $|g|_{C^{0, \alpha}(V_1)} < \infty$ und $g(a) = b$, so dass $F(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in V_1$.

Falls zusätzlich $\frac{\partial F}{\partial y}$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ gleichmäßig stetig ist und $\left\| \left(\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right)^{-1} \right\| \leq C$ für alle $(a, b) \in \Omega$, wobei $\Omega \subset \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mid F(x, y) = 0, \det \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0\}$, so können wir $V_1 = B_\epsilon(a)$ wählen, wobei ϵ unabhängig vom Punkt $(a, b) \in \Omega$ ist.

Bemerkung: Die erste Aussage ist lokaler Natur und gilt dementsprechend auch für eine auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ definierte, lokal Hölderstetige Funktion. Für die Gültigkeit der zweiten Aussage ist hier aber essentiell, dass F auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ definiert ist und eine globale Hölderkonstante besitzt. Beachte, dass wir keine Beschränktheit von F fordern.

Beweis: (Dieser ist größtenteils aus [9] übernommen mit einigen Abänderungen und Erweiterungen, die für die Hölderstetigkeit und den Zusatz notwendig sind.) Da wir später nur die Variante mit Zusatz benötigen, werden wir auch nur diese beweisen. Durch einfache Modifikation des Beweises sieht man leicht, dass die Hauptaussage auch ohne den Zusatz gültig ist.

Wir setzen $B := \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \in GL(m, \mathbb{R})$ und definieren die Abbildung $G: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch $G(x, y) := y - B^{-1}F(x, y)$. Dann gilt $F(x, y) = 0 \iff y = G(x, y)$, wir betrachten also nun ein Fixpunkt-Problem.

Setze $K := \|F\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)}$. Da $\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = I - B^{-1}\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$, wobei I die m -reihige Einheitsmatrix bezeichnet, folgt $\frac{\partial G}{\partial y}(a, b) = 0$. Also gilt

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) \right\| &= \left\| \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial G}{\partial y}(a, b) \right\| = \left\| B^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right) \right\| \\ &\leq \|B^{-1}\| \left\| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right\| \leq C \left\| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right\|. \end{aligned}$$

Da alle Komponenten der Matrix $\frac{\partial F}{\partial y}$ gleichmäßig stetig sind, existieren von $(a, b) \in \Omega$ unabhängige $\tilde{\epsilon} > 0$ und $\tilde{r} > 0$, so dass $\left\| \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) \right\| \leq \frac{1}{2+KC}$ für alle $(x, y) \in B_{\tilde{\epsilon}}(a) \times B_{\tilde{r}}(b) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

Wir wählen ein $r > 0$ mit $r < \tilde{r}$. Da $G(a, b) = b$ und F gleichmäßig stetig ist, gibt es ein von (a, b) unabhängiges $\epsilon > 0$ mit $\epsilon \leq \tilde{\epsilon}$, so dass

$$|G(x, b) - b| = |B^{-1}(F(x, b) - F(a, b))| \leq C|F(x, b) - F(a, b)| \leq \frac{r}{2}$$

für alle $x \in B_{\epsilon}(a)$. Wir setzen $V_1 = B_{\epsilon}(a)$ und $V_2 = \overline{B_r(b)}$, dann gilt für alle $x \in V_1$ und $y, \tilde{y} \in V_2$ nach Mittelwertsatz (Siehe Kapitel 6, Corollar zu Satz 5 in [9].)

$$|G(x, y) - G(x, \tilde{y})| \leq \frac{1}{2+KC} |y - \tilde{y}| \leq \frac{1}{2} |y - \tilde{y}|. \quad (16)$$

Mit $\tilde{y} = b$ ergibt sich für alle $x \in V_1$

$$|y - b| \leq r \implies |G(x, y) - b| \leq r. \quad (17)$$

Für jedes feste $x \in V_1$ ist also die Abbildung $y \mapsto G(x, y)$ eine Abbildung der abgeschlossenen Kugel V_2 in sich, die nach (16) eine Kontraktion ist. Es gibt also nach dem Banach'schen Fixpunktsatz zu jedem $x \in V_1$ genau ein $y =: g(x) \in V_2$, so dass $G(x, y) = y$, d.h. $F(x, y) = 0$.

Sei $\varphi(x) \in C^0(V_1, \mathbb{R}^m)$ mit $\|\varphi - b\|_{C^0(V_1)} \leq r$ und $|\varphi|_{C^{0,\alpha}(V_1)} \leq 1 + KC$, dann gilt für die durch $\psi(x) := G(x, \varphi(x))$ definierte Abbildung wegen (17) ebenfalls $\psi(x) \in C^0(V_1, \mathbb{R}^m)$ mit $\|\psi - b\|_{C^0(V_1)} \leq r$. Weiter gilt mit (16)

$$\begin{aligned} \frac{|\psi(x) - \psi(\tilde{x})|}{|x - \tilde{x}|^\alpha} &= \frac{|G(x, \varphi(x)) - G(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x}))|}{|x - \tilde{x}|^\alpha} \\ &\leq \frac{|G(x, \varphi(x)) - G(x, \varphi(\tilde{x}))|}{|x - \tilde{x}|^\alpha} + \frac{|G(x, \varphi(\tilde{x})) - G(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x}))|}{|x - \tilde{x}|^\alpha} \\ &\leq \frac{1}{2+KC} \frac{|\varphi(x) - \varphi(\tilde{x})|}{|x - \tilde{x}|^\alpha} + \|B^{-1}\| \frac{|F(x, \varphi(\tilde{x})) - F(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x}))|}{|x - \tilde{x}|^\alpha} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2+KC}(1+KC) + KC \leq 1+KC.$$

Es gilt also auch $|\psi|_{C^{0,\alpha}(V_1)} \leq 1+KC$, die Zuordnung $\varphi \mapsto \psi$ liefert also eine Abbildung Φ der abgeschlossenen Teilmenge

$$A := \{\varphi \in C^0(V_1, \mathbb{R}^m) : \|\varphi - b\|_{C^0(V_1)} \leq r, |\varphi|_{C^{0,\alpha}(V_1)} \leq 1+KC\}$$

des Banachraums aller beschränkten Funktionen aus $C^0(V_1, \mathbb{R}^m)$ in sich. Aus (16) folgt für $\varphi_1, \varphi_2 \in A$

$$\begin{aligned} \|\Phi(\varphi_1) - \Phi(\varphi_2)\|_{C^0(V_1)} &= \sup_{x \in V_1} |G(x, \varphi_1(x)) - G(x, \varphi_2(x))| \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{x \in V_1} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = \frac{1}{2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C^0(V_1)}, \end{aligned}$$

die Abbildung $\Phi: A \rightarrow A$ ist also eine Kontraktion. Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz besitzt Φ deshalb genau einen Fixpunkt $g \in A \subset C^0(V_1, \mathbb{R}^m)$. Diese Abbildung $g \in C^{0,\alpha}(V_1, V_2)$ erfüllt $G(x, g(x)) = g(x)$, d.h. $F(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in V_1$ und stimmt natürlich wegen der Eindeutigkeit mit der oben konstruierten Abbildung überein. \square

Satz 14 *Sei X_λ eine Lösung von \mathcal{P}_λ , dann gilt $X_\lambda \in C^2(\partial B)$.*

Beweis: Wir definieren $F(\varphi, z): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$F(\varphi, z) := \frac{\lambda G(X_\lambda(1, \varphi))^2 z}{\sqrt{|z|^2 + \frac{1}{\lambda}}} + \frac{2}{\lambda} z - f(\varphi),$$

wobei f die Funktion aus Lemma 12 ist. (Wir haben hier die auf ∂B definierten Funktionen periodisch nach \mathbb{R} fortgesetzt.) Dann gilt also $F(\varphi, (X_\lambda)_\varphi(1, \varphi)) = 0$ für fast alle $\varphi \in \mathbb{R}$.

Wir haben $X_\lambda(1, \varphi) \in H_2^1(\mathbb{R}) \subset C^{0, \frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ und $f(\varphi) \in H_2^1(\mathbb{R}) \subset C^{0, \frac{1}{2}}(\mathbb{R})$, wobei die Hölderkonstanten wegen der Periodizität auch global existieren. Die Funktion G^2 ist Lipschitzstetig auf \overline{T}_μ , daher gilt auch $G(X_\lambda(1, \varphi))^2 \in C^{0, \frac{1}{2}}(\mathbb{R})$. Desweiteren sind die Funktionen $\frac{\lambda z}{\sqrt{|z|^2 + \frac{1}{\lambda}}}$ und $\frac{2}{\lambda} z$ global Lipschitzstetig, $\frac{\lambda z}{\sqrt{|z|^2 + \frac{1}{\lambda}}}$ ist außerdem beschränkt und demnach ist $F(\varphi, z)$ global $\frac{1}{2}$ -Hölderstetig. Weiterhin ist $F(\varphi, z)$ nach z stetig differenzierbar und für die Ableitungen gilt

$$\frac{\partial F_i}{\partial z_i} = \frac{2}{\lambda} - \frac{\lambda G(X_\lambda)^2 z_i^2}{(|z|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{2}}} + \frac{\lambda G(X_\lambda)^2}{\sqrt{|z|^2 + \frac{1}{\lambda}}}, \quad \frac{\partial F_i}{\partial z_j} = -\frac{\lambda G(X_\lambda)^2 z_i z_j}{(|z|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{2}}}, \quad i \neq j.$$

Genau wie oben sieht man, dass auch die Ableitungen global $\frac{1}{2}$ -Hölderstetig und damit gleichmäßig stetig sind. Eine einfache Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial F}{\partial z} &= \left(\frac{2}{\lambda}\right)^3 - \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \frac{\lambda G(X_\lambda)^2 |z|^2}{(|z|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{2}}} + 3 \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \frac{\lambda G(X_\lambda)^2}{\sqrt{|z|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \\ &\quad - 2 \frac{2}{\lambda} \frac{(\lambda G(X_\lambda)^2)^2 |z|^2}{(|z|^2 + \frac{1}{\lambda})^2} + 3 \frac{2}{\lambda} \frac{(\lambda G(X_\lambda)^2)^2}{|z|^2 + \frac{1}{\lambda}} - \frac{(\lambda G(X_\lambda)^2)^3 |z|^2}{(|z|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{5}{2}}} + \frac{(\lambda G(X_\lambda)^2)^3}{(|z|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left(\frac{2}{\lambda} \right)^2 + 2 \frac{2}{\lambda} \frac{\lambda G(X_\lambda)^2}{\sqrt{|z|^2 + \frac{1}{\lambda}}} + \frac{(\lambda G(X_\lambda)^2)^2}{|z|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right) \\
&\quad \cdot \left(\frac{2}{\lambda} - \frac{\lambda G(X_\lambda)^2 |z|^2}{(|z|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{2}}} + \frac{\lambda G(X_\lambda)^2}{\sqrt{|z|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right) \\
&= \left(\frac{2}{\lambda} + \frac{\lambda G(X_\lambda)^2}{\sqrt{|z|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right)^2 \left(\frac{2}{\lambda} + \frac{G(X_\lambda)^2}{(|z|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{2}}} \right) \geq \left(\frac{2}{\lambda} \right)^3
\end{aligned}$$

Also ist $\frac{\partial F}{\partial z}$ invertierbar, und wegen $\left| \frac{\partial F_i}{\partial z_j} \right| \leq \frac{2}{\lambda} + \lambda^{\frac{3}{2}} G(X_\lambda)^2$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$ gilt

$$\left| \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_{ij}^{-1} \right| = \frac{1}{\det \frac{\partial F}{\partial z}} \left| \left(\text{Adj} \frac{\partial F}{\partial z} \right)_{ij} \right| \leq \left(\frac{2}{\lambda} \right)^{-3} 2 \left(\frac{2}{\lambda} + \lambda^{\frac{3}{2}} G(X_\lambda)^2 \right)^2 \leq C,$$

da $X_\lambda(\partial B) \subset T_\mu$.

Somit sind alle erforderlichen Voraussetzungen erfüllt und nach Satz 13 erhalten wir für fast alle $a \in \mathbb{R}$ eine Umgebung $B_\epsilon(a)$ und eine Funktion $g_a \in C^0(B_\epsilon(a))$ mit $|g|_{C^{0,\alpha}(B_\epsilon(a))} < \infty$ und $g_a(a) = (X_\lambda)_\varphi(1, a)$, so dass $F(\varphi, g_a(\varphi)) = 0$. Die gewonnenen lokalen Lösungen sind aber nur in Umgebungen um $(X_\lambda)_\varphi(a)$ eindeutig, müssen also zuerst einmal nicht mit $(X_\lambda)_\varphi$ übereinstimmen! Globale Eindeutigkeit muss separat gezeigt werden:

Es gelte $F(\varphi, z) = 0$ und $F(\varphi, \tilde{z}) = 0$, dann folgt

$$f(\varphi) = \frac{2}{\lambda} z + \frac{\lambda G(X_\lambda(\varphi))^2 z}{\sqrt{|z|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \quad \text{und} \quad f(\varphi) = \frac{2}{\lambda} \tilde{z} + \frac{\lambda G(X_\lambda(\varphi))^2 \tilde{z}}{\sqrt{|\tilde{z}|^2 + \frac{1}{\lambda}}},$$

also

$$\left(\frac{2}{\lambda} + \frac{\lambda G(X_\lambda(\varphi))^2}{\sqrt{|z|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right) z = \left(\frac{2}{\lambda} + \frac{\lambda G(X_\lambda(\varphi))^2}{\sqrt{|\tilde{z}|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right) \tilde{z}.$$

Da die Terme in den Klammern positiv sind, gilt also $\tilde{z} = tz$ mit $t \neq 0$. Falls $z = 0$, folgt, dass $\tilde{z} = 0$. Falls $z \neq 0$, betrachte die Funktion

$$h(s) := \left(\frac{2}{\lambda} + \frac{\lambda G(X_\lambda(\varphi))^2}{\sqrt{s^2 |z|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right) s.$$

Dann gilt

$$h'(s) = \frac{G(X_\lambda(\varphi))^2}{\sqrt{s^2 |z|^2 + \frac{1}{\lambda}}^3} + \frac{2}{\lambda} > 0.$$

Demnach ist $h(s)$ injektiv und aus

$$\left(\frac{2}{\lambda} + \frac{\lambda G(X_\lambda(\varphi))^2}{\sqrt{|z|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right) z = \left(\frac{2}{\lambda} + \frac{\lambda G(X_\lambda(\varphi))^2}{\sqrt{|tz|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right) tz$$

folgt wegen $z \neq 0$, dass $h(1) = h(t)$, also $t = 1$ und folglich $z = tz = \tilde{z}$.

Zu jedem $\varphi \in \mathbb{R}$ gibt es also höchstens eine Lösung z der Gleichung $F(\varphi, z) = 0$, d.h. die Funktionen $g_a \in C^{0, \frac{1}{2}}(B_\epsilon(a))$ müssen doch fast überall mit $(X_\lambda)_\varphi$ übereinstimmen. Da ϵ unabhängig von a gewählt werden kann, überdecken die $B_\epsilon(a)$ das Intervall $[0, 2\pi]$. Weil dieses kompakt ist, reichen endlich viele der $B_\epsilon(a)$ aus, und wir erhalten $(X_\lambda)_\varphi \in C^{0, \frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}^3)$, da die Zusammensetzung endlich vieler Hölderstetiger Funktionen wieder Hölderstetig ist.

Nach Lemma 12 gilt nun sogar $f(\varphi) \in C^{1, \frac{1}{2}}(\partial B)$ und somit ist auch $F(\varphi, z)$ stetig differenzierbar. Wir können nun die Standardversion des Satzes über implizite Funktionen anwenden und erhalten $(X_\lambda)_\varphi \in C^1(\partial B)$ bzw. $X_\lambda \in C^2(\partial B)$. \square

8 Das eindimensionale Funktional

Da wir wissen, dass Lösungen von \mathcal{P}_λ harmonisch sind und die harmonische Fortsetzung eindeutig ist, haben wir die Möglichkeit, F_λ als eindimensionales Funktional zu schreiben. (Siehe (1), (2) und (3) für die Definitionen.) Der Beweis würde sehr einfach schon aus den Resultaten über Sobolevräume fraktionaler Ordnung folgen, die wir schon in Kapitel 6 benutzt haben. Da dieses Ergebnis aber fundamental für die gesamte, in den folgenden Kapiteln entwickelte Numerik ist, wollen wir hier einen möglichst elementaren Beweis führen, für den wir nur Lemma 2 benötigen. Wir können unser Variationsproblem wie folgt umformulieren:

Satz 15 *Sei*

$$E_\lambda(\gamma) := D(\Phi(\gamma)) + \lambda \int_{\partial B} G(\gamma)^2 \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} + \frac{1}{\lambda} \int_{\partial B} (|\gamma'|^2 + \varrho |\gamma - P|^2), \quad (18)$$

wobei $\Phi(\gamma)$ die harmonische Fortsetzung aus Lemma 2 ist, und

$$\mathcal{C}^* := \{\gamma \in H_2^1(\partial B, \mathbb{R}^3) \mid \gamma(\partial B) \subset T_\mu, L(\gamma, \Pi) \neq 0\}, \quad (19)$$

dann ist \mathcal{P}_λ äquivalent zu dem Variationsproblem

$$\mathcal{P}_\lambda^* : E_\lambda(\gamma) \rightarrow \min \text{ in } \mathcal{C}^*. \quad (20)$$

Beweis: Da Lösungen von \mathcal{P}_λ harmonisch sind, sind sie also genau die Minimierer von F_λ in der Klasse $\{X \in \mathcal{C} \mid \Delta X = 0\}$. Aufgrund der Eindeutigkeit der harmonischen Fortsetzung sind die Randwerte dieser Lösungen demnach genau die Minimierer von E_λ in der Klasse $\{\gamma \in \mathcal{C}^* \mid \Phi(\gamma) \in H_2^1(B, \mathbb{R}^3)\}$. Es bleibt also noch zu zeigen, dass $\Phi(\gamma) \in H_2^1(B, \mathbb{R}^3)$ für $\gamma \in \mathcal{C}^*$. Da γ beschränkt ist, gilt dies nach dem Maximumprinzip auch für $\Phi(\gamma)$. Daraus folgt $\|\Phi(\gamma)\|_{L_2(B)} < \infty$. Es gilt

$$\Phi(\gamma)(\rho e^{i\varphi}) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)),$$

wobei

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi.$$

Mit einer einfachen Rechnung erhält man

$$\begin{aligned} \|\nabla \Phi(\gamma)\|_{L_2(B_r)}^2 &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho \left| \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi(\gamma)(\rho e^{i\varphi}) \right|^2 + \frac{1}{\rho} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi(\gamma)(\rho e^{i\varphi}) \right|^2 d\varphi d\rho \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n r^{2n} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \end{aligned}$$

für alle $r \in (0, 1)$. (Vgl. auch [4], Kapitel 6.4, Lemma 1 und Beweis von Theorem 1.) Nach Definition sind a_n, b_n die Fourierkoeffizienten von γ . Da $\gamma \in H_2^1(\partial B)$, konvergiert die komponentenweise abgeleitete Fourierreihe von γ in L_2 gegen γ' . (Da sich γ' als L_2 -Funktion in eine Fourierreihe entwickeln lässt,

folgt dies sofort aus der partiellen Integrationsformel für Sobolevfunktionen, weil für die Fourierkoeffizienten \tilde{a}_n , $n \geq 1$ von γ' gilt:

$$\tilde{a}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \gamma'(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi = \frac{n}{\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi = nb_n$$

Analog folgt $\tilde{b}_n = -na_n$ und es gilt $\tilde{a}_0 = 0$, da γ periodisch ist.) Eine einfache Rechnung ergibt dann

$$\begin{aligned} \|\gamma'\|_{L_2(\partial B)}^2 &= \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos(n\varphi) - na_n \sin(n\varphi) \right|^2 d\varphi \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|a_n|^2 + |b_n|^2) \end{aligned}$$

und es folgt durch Vergleich der beiden Reihen

$$\|\nabla\Phi(\gamma)\|_{L_2(B)} = \lim_{r \rightarrow 1} \|\nabla\Phi(\gamma)\|_{L_2(B_r)} \leq \|\gamma'\|_{L_2(\partial B)} < \infty.$$

□

Beachte, dass Lösungen von \mathcal{P}_λ^* somit nach Satz 14 von der Klasse C^2 sind. Es gilt $E_\lambda(\gamma) \in C^1(\mathcal{C}^*, \mathbb{R})$, jedoch nicht $E_\lambda(\gamma) \in C^2(\mathcal{C}^*, \mathbb{R})$. (Um dies zu erhalten müssten wir das Funktional auf den etwas kleineren Raum H_3^1 einschränken, es gilt also $E_\lambda(\gamma) \in C^2(\mathcal{C}^* \cap H_3^1(\partial B), \mathbb{R})$.) Die zweite Variation existiert aber für alle $\gamma \in \mathcal{C}^*$, was für unsere Zwecke ausreichend ist. Für $\gamma \in \mathcal{C}^*$ und $\xi, \eta \in H_2^1(\partial B, \mathbb{R}^3)$ erhalten wir mit der Linearität von Φ :

$$\begin{aligned} \delta E_\lambda(\gamma)(\xi) &= \frac{d}{d\epsilon} E_\lambda(\gamma + \epsilon\xi) \Big|_{\epsilon=0} = \int_B \langle \nabla\Phi(\gamma), \nabla\Phi(\xi) \rangle \\ &+ \lambda \int_{\partial B} \left(2G(\gamma) \langle \nabla G(\gamma), \xi \rangle \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} + G(\gamma)^2 \frac{\langle \gamma', \xi' \rangle}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right) \\ &+ \frac{2}{\lambda} \int_{\partial B} (\langle \gamma', \xi' \rangle + \langle \varrho(\gamma - P), \xi \rangle), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 E_\lambda(\gamma)(\xi, \eta) &= \frac{d}{d\epsilon} \frac{d}{d\tau} E_\lambda(\gamma + \epsilon\xi + \tau\eta) \Big|_{\epsilon=0} \Big|_{\tau=0} = \int_B \langle \nabla\Phi(\xi), \nabla\Phi(\eta) \rangle \\ &+ \lambda \int_{\partial B} \left(2 \langle \nabla G(\gamma), \xi \rangle \langle \nabla G(\gamma), \eta \rangle \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} + 2G(\gamma) \langle \xi, \nabla^2 G(\gamma) \eta \rangle \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right. \\ &+ 2G(\gamma) \langle \nabla G(\gamma), \xi \rangle \frac{\langle \gamma', \eta' \rangle}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} + 2G(\gamma) \langle \nabla G(\gamma), \eta \rangle \frac{\langle \gamma', \xi' \rangle}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \\ &\left. + G(\gamma)^2 \frac{\langle \xi', \eta' \rangle (|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}) - \langle \gamma', \xi' \rangle \langle \gamma', \eta' \rangle}{(|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{2}}} \right) + \frac{2}{\lambda} \int_{\partial B} (\langle \xi', \eta' \rangle + \langle \varrho(\xi, \eta) \rangle) \end{aligned} \quad (22)$$

9 Das diskrete Funktional

Bei der Notation der diskreten Funktionenräume orientieren wir uns soweit wie möglich an [7] und [8]. Sei \mathcal{G}_h eine Triangulation von B mit folgenden Eigenschaften: Jedes Dreieck $G \in \mathcal{G}_h$ hat einen Durchmesser von höchstens h und mindestens σh für eine Konstante $\sigma > 0$ unabhängig von h und hat von Null weg beschränkte Winkel unabhängig von h .

Wir definieren

$$B_h = \bigcup \{G \mid G \in \mathcal{G}_h\}, \quad \partial B_h = \bigcup \{E_j \mid 1 \leq j \leq M\},$$

wobei E_j die Randkanten sind. Weiter bezeichnen wir die Knotenpunkte mit ν_l , $1 \leq l \leq N$ und die Randknoten mit $e^{i\varphi_j} = \nu_j$ bzw. einfach φ_j , $1 \leq j \leq M$ je nach Betrachtungsweise. Außerdem definieren wir die Projektion $\pi : \partial B \rightarrow \partial B_h$ durch

$$\pi \left(e^{i((1-t)\varphi_{j-1} + t\varphi_j)} \right) = (1-t)e^{i\varphi_{j-1}} + te^{i\varphi_j}$$

für alle $0 \leq t \leq 1$ und alle $j \in \{1, \dots, M\}$, wobei wir hier und im Folgenden immer $\varphi_0 := \varphi_M$ setzen. Wir werden im folgenden diskreten Raum arbeiten:

$$\mathcal{C}_h = \{ \gamma_h \in C^0(\partial B, \mathbb{R}^3) \mid \gamma_h \in P_1(\pi^{-1}[E_j]) \ \forall j, \ \gamma_h(\partial B) \subset T_\mu, \ L(\gamma_h, \Pi) \neq 0 \}, \quad (23)$$

wobei $P_1(\pi^{-1}[E_j])$ die affin linearen Funktionen auf $\pi^{-1}[E_j]$ sind. Es gilt also $\mathcal{C}_h \subset \mathcal{C}^*$. Wir definieren den Raum der diskreten Variationen durch

$$\mathcal{H}_h = \{ \xi_h \in C^0(\partial B, \mathbb{R}^3) \mid \xi_h \in P_1(\pi^{-1}[E_j]) \ \forall j \} \quad (24)$$

und ebenso

$$\overline{\mathcal{H}}_h = \{ \xi_h \in C^0(\partial B, \mathbb{R}) \mid \xi_h \in P_1(\pi^{-1}[E_j]) \ \forall j \}.$$

Dann ist $\overline{\mathcal{H}}_h$ ein M -dimensionaler Vektorraum und \mathcal{C}_h ist eine offene Teilmenge des $3M$ -dimensionalen Vektorraums \mathcal{H}_h . Sei $f \in C^0(\partial B, \mathbb{R}^n)$, $n \in \{1, 3\}$. Dann definieren wir die stückweise lineare Interpolierende $I_h f \in \mathcal{H}_h$ bzw. $I_h f \in \overline{\mathcal{H}}_h$ durch

$$I_h f((1-t)\varphi_{j-1} + t\varphi_j) = (1-t)f(\varphi_{j-1}) + tf(\varphi_j)$$

für alle $0 \leq t \leq 1$ und alle j , wobei wir die auf ∂B definierte Funktion f mit einer 2π -periodischen Funktion auf \mathbb{R} identifiziert haben. (Beachte, dass wir hier etwas von der Notation in [7] und [8] abweichen, wo dieser Operator auf ∂B_h und nicht auf ∂B definiert ist.)

Es ist klar, dass die Klasse \mathcal{C}_h nicht leer ist, falls h klein genug und \mathcal{C}^* nicht leer ist. Denn in diesem Fall existiert nach Satz 5 eine Lösung γ_λ von \mathcal{P}_λ^* , welche nach Corollar 7 in \overline{T}_{μ_0} liegt. Für h klein genug gilt dann $I_h \gamma_\lambda \in \mathcal{C}_h$.

Wir betrachten nun noch die doppelt so feine Zerlegung von ∂B , bei der zu den vorhandenen Punkten φ_j jeweils noch die Mittelpunkte $\varphi_{j-\frac{1}{2}} := \frac{\varphi_{j-1} + \varphi_j}{2}$ hinzukommen. Dann wird jede Randkante E_j durch den Punkt $\pi(e^{i\varphi_{j-\frac{1}{2}}})$ in

zwei gleich große Teile E_j^1 und E_j^2 zerlegt. Der Einfachheit halber bezeichnen wir den entsprechenden diskreten Raum mit $\overline{\mathcal{H}}_{\frac{h}{2}}$, also

$$\overline{\mathcal{H}}_{\frac{h}{2}} = \{ \xi_h \in C^0(\partial B, \mathbb{R}) \mid \xi_h \in P_1(\pi^{-1}[E_j^1]), \xi_h \in P_1(\pi^{-1}[E_j^2]) \forall j \}.$$

Die lineare Interpolierende $I_{\frac{h}{2}} f \in \overline{\mathcal{H}}_{\frac{h}{2}}$ zu dieser Zerlegung definieren wir durch

$$I_{\frac{h}{2}} f \left((1-t)\varphi_{j-1} + t\varphi_{j-\frac{1}{2}} \right) = (1-t)f(\varphi_{j-1}) + tf(\varphi_{j-\frac{1}{2}})$$

bzw.

$$I_{\frac{h}{2}} \left((1-t)\varphi_{j-\frac{1}{2}} + t\varphi_j \right) = (1-t)f(\varphi_{j-\frac{1}{2}}) + tf(\varphi_j)$$

für alle $0 \leq t \leq 1$ und alle j . Außerdem benötigen wir die folgenden diskreten Funktionenräume:

$$X_h^n = \{ u_h \in C^0(B_h, \mathbb{R}^n) \mid u_h \in P_1(G) \forall G \in \mathcal{G}_h \}$$

$$x_h^n = \{ f_h \in C^0(\partial B_h, \mathbb{R}^n) \mid f_h \in P_1(E_j) \forall j \}$$

Wir definieren für $f_h \in x_h^1$ die diskrete harmonische Erweiterung $\Phi_h f_h \in X_h^1$ durch

$$\int_{B_h} \nabla(\Phi_h f_h) \nabla \psi_h = 0 \quad \forall \psi_h \in X_h \text{ mit } \psi_h|_{\partial B_h} = 0,$$

$$\Phi_h f_h = f_h \text{ auf } \partial B_h.$$

Für $f_h \in x_h^n$ wird $\Phi_h f_h \in X_h^n$ komponentenweise definiert.

Nun können wir für $\gamma_h \in \mathcal{C}_h$ das diskrete Funktional durch

$$\begin{aligned} E_h^\lambda(\gamma_h) &:= D_h(\Phi_h(\gamma_h(\pi^{-1}))) + \lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}}(G(\gamma_h)^2) \sqrt{|\gamma_h'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \\ &+ \frac{1}{\lambda} \int_{\partial B} (|\gamma_h'|^2 + (I_h \varrho)|\gamma_h - P|^2) \end{aligned} \quad (25)$$

definieren. Dabei ist $D_h(\Phi_h(f_h)) = \frac{1}{2} \int_{B_h} |\nabla \Phi_h(f_h)|^2$ das Dirichletintegral der diskreten harmonischen Erweiterung Φ_h von $f_h \in x_h^3$.

Bemerkung: Formell würde es keinen Unterschied machen, I_h statt $I_{\frac{h}{2}}$ zu benutzen. Wir könnten später die Fehlerabschätzung auf exakt die gleiche Weise durchführen. In diesem Fall würde aber bei der praktischen Umsetzung die Funktion G nur an den äußeren Eckpunkten der Fläche ausgewertet. Wenn also die Verbindungskante zwischen zwei Punkten im Mittel weit von der Stützfläche S entfernt wäre, so würde der Strafterm dies nicht merken. Die Fläche könnte also sehr einfach aus dem lokalen Minimum herausrutschen und zu einem Punkt degenerieren. Mit der Wahl von $I_{\frac{h}{2}}$ wird dieses Problem beseitigt, da G dann zusätzlich noch an den Mittelpunkten aller Außenkanten ausgewertet wird.

Beachte, dass E_h^λ natürlich nicht einfach die Einschränkung von E_λ auf \mathcal{C}_h ist. Im Gegensatz zum kontinuierlichen Funktional gilt hier $E_h^\lambda(\gamma_h) \in C^2(\mathcal{C}_h, \mathbb{R})$.

(Siehe Corollar 17.) Für $\gamma_h \in \mathcal{C}_h$, $\xi_h, \eta_h \in \mathcal{H}_h$ erhalten wir für die erste und zweite Variation analog zu denen von E_λ :

$$\begin{aligned} \delta E_h^\lambda(\gamma_h)(\xi_h) &= \int_{B_h} \langle \nabla \Phi_h(\gamma_h(\pi^{-1})), \nabla \Phi_h(\xi_h(\pi^{-1})) \rangle \\ &+ \lambda \int_{\partial B} \left(2I_{\frac{h}{2}}(G(\gamma_h) \langle \nabla G(\gamma_h), \xi_h \rangle) \sqrt{|\gamma_h'|^2 + \frac{1}{\lambda}} + I_{\frac{h}{2}}(G(\gamma_h)^2) \frac{\langle \gamma_h', \xi_h' \rangle}{\sqrt{|\gamma_h'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right) \\ &+ \frac{2}{\lambda} \int_{\partial B} (\langle \gamma_h', \xi_h' \rangle + (I_h \varrho)(\gamma_h - P, \xi_h)), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 E_h^\lambda(\gamma_h)(\xi_h, \eta_h) &= \int_{B_h} \langle \nabla \Phi_h(\xi_h(\pi^{-1})), \nabla \Phi_h(\eta_h(\pi^{-1})) \rangle \\ &+ \lambda \int_{\partial B} \left(2I_{\frac{h}{2}}(\langle \nabla G(\gamma_h), \xi_h \rangle \langle \nabla G(\gamma_h), \eta_h \rangle) \sqrt{|\gamma_h'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right. \\ &+ 2I_{\frac{h}{2}}(G(\gamma_h) \langle \xi_h, \nabla^2 G(\gamma_h) \eta_h \rangle) \sqrt{|\gamma_h'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \\ &+ 2I_{\frac{h}{2}}(G(\gamma_h) \langle \nabla G(\gamma_h), \xi_h \rangle) \frac{\langle \gamma_h', \eta_h' \rangle}{\sqrt{|\gamma_h'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} + 2I_{\frac{h}{2}}(G(\gamma_h) \langle \nabla G(\gamma_h), \eta_h \rangle) \frac{\langle \gamma_h', \xi_h' \rangle}{\sqrt{|\gamma_h'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \\ &+ I_{\frac{h}{2}}(G(\gamma_h)^2) \frac{\langle \xi_h', \eta_h' \rangle (|\gamma_h'|^2 + \frac{1}{\lambda}) - \langle \gamma_h', \xi_h' \rangle \langle \gamma_h', \eta_h' \rangle}{(|\gamma_h'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{2}}} \Big) \\ &+ \frac{2}{\lambda} \int_{\partial B} (\langle \xi_h', \eta_h' \rangle + (I_h \varrho)(\xi_h, \eta_h)) \end{aligned} \quad (27)$$

Wir können nun formulieren, was wir in dieser Arbeit unter einer Lösung des diskreten Problems verstehen wollen. Im kontinuierlichen Fall haben wir nur Minima betrachtet, aber numerisch werden wir Nullstellen von δE_h^λ bzw. stationäre Punkte von E_h^λ berechnen. Also ist folgende Definition sinnvoll:

Definition: Eine Funktion $\gamma_h \in \mathcal{C}_h$ ist genau dann eine „Lösung des diskreten Problems“, wenn $\delta E_h^\lambda(\gamma_h)(\xi_h) = 0$ für alle $\xi_h \in \mathcal{H}_h$ gilt.

10 Der Algorithmus

Um Lösungen des diskreten Problems zu finden, werden wir ein gedämpftes Newton-Verfahren verwenden. Die Idee dabei ist, dass die in einer Newton-Iteration berechnete Schrittweite zwar in die richtige Richtung zeigt, aber eventuell „über das Ziel hinausschießt“. Um trotzdem eine Konvergenz zu erreichen, halbiert man die Schrittweite solange, bis der Betrag der Funktion tatsächlich kleiner geworden ist. Der entsprechende Algorithmus sieht wie folgt aus:

Algorithmus:

0. Definiere Startwerte γ_h und eine Fehlertoleranz ϵ .
1. Berechne $\delta E_h^\lambda(\gamma_h)$.
2. Falls $\|\delta E_h^\lambda(\gamma_h)\|_{\mathcal{H}_h} \leq \epsilon$, gehe zu Schritt 7.
3. Berechne $\delta^2 E_h^\lambda(\gamma_h)$.
4. Löse das lineare Problem $\delta^2 E_h^\lambda(\gamma_h)(\eta_h, \xi_h) = -\delta E_h^\lambda(\gamma_h)(\xi_h) \quad \forall \xi_h \in \mathcal{H}_h$.
5. Falls $\|\delta E_h^\lambda(\gamma_h)\|_{\mathcal{H}_h} \leq \|\delta E_h^\lambda(\gamma_h + \eta_h)\|_{\mathcal{H}_h}$, setze $\eta_h := \frac{\eta_h}{2}$ und führe Schritt 5 erneut aus.
6. Setze $\gamma_h := \gamma_h + \eta_h$ und gehe zu Schritt 1.
7. Berechne $\Phi_h(\gamma_h(\pi^{-1}))$ sowie $E_h^\lambda(\gamma_h)$ und stoppe.

Um diesen Algorithmus vernünftig implementieren zu können, bringen wir die erste und zweite Variation von E_h^λ zuerst in Matrix-Vektor-Form. Dazu verwenden wir wieder soweit möglich die Notation von [7] und [8].

Die Basisfunktionen $\zeta_h^{(i)} \in \overline{\mathcal{H}}_h$, $i = 1, \dots, M$ bzw. $\psi_h^{(l)} \in X_h^1$, $l = 1, \dots, N$ sind eindeutig bestimmt durch

$$\zeta_h^{(i)}(\varphi_j) = \delta_{ij} \quad \forall j \text{ bzw. } \psi_h^{(l)}(\nu_m) = \delta_{lm} \quad \forall m.$$

Für $\gamma_h \in \mathcal{C}_h$, $\xi_h \in \mathcal{H}_h$, $u_h \in X_h^3$ und die Funktion ϱ aus Kapitel 2 seien

$$\gamma_i = \gamma_h(\varphi_i) \in \mathbb{R}^3, \quad \xi_i = \xi_h(\varphi_i) \in \mathbb{R}^3, \quad u_l = u_h(\nu_l) \in \mathbb{R}^3, \quad \varrho_i = \varrho(\varphi_i) \in \mathbb{R}.$$

Damit gilt

$$\gamma_h = \sum_{i=1}^M \gamma_i \zeta_h^{(i)}, \quad \xi_h = \sum_{i=1}^M \xi_i \zeta_h^{(i)}, \quad u_h = \sum_{l=1}^N u_l \psi_h^{(l)}, \quad I_h \varrho = \sum_{i=1}^M \varrho_i \zeta_h^{(i)}.$$

Für $i = 1, \dots, M$ sind die diskreten Poisson-Kerne $K_h^{(i)} = \Phi_h \left(\psi_h^{(i)}|_{\partial B_h} \right)$ nach Definition von Φ_h eindeutig bestimmt durch

$$\int_{B_h} \nabla K_h^{(i)} \nabla \psi_h^{(l)} = 0 \quad \text{für } M < l \leq N,$$

$$K_h^{(i)} = \psi_h^{(i)} \quad \text{auf } \partial B_h.$$

Setzen wir $K_m^{(i)} = K_h^{(i)}(\nu_m) \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$K_h^{(i)} = \sum_{l=1}^N K_l^{(i)} \psi_h^{(l)}.$$

Um die Koeffizienten $K_l^{(i)}$ zu berechnen, definieren wir zuerst die $N \times N$ -Steifigkeitsmatrix $\mathbf{S} = S_{lm}$ durch

$$S_{lm} = \int_{B_h} \nabla \psi_h^{(l)} \nabla \psi_h^{(m)}.$$

Weiter seien die $N \times N$ -Matrix $\mathbf{S}^{(0)} = S_{lm}^{(0)}$ und die N -Vektoren $\mathbf{b}^{(i)} = b_l^{(i)}$ gegeben durch

$$S_{lm}^{(0)} = \begin{cases} \delta_{lm} & 1 \leq l, m \leq M \\ S_{lm} & M < l, m \leq N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad b_l^{(i)} = \begin{cases} \delta_{il} & 1 \leq l \leq M \\ -S_{il} & M < l \leq N \end{cases}.$$

Wir können nun die N -Vektoren $\mathbf{K}^{(i)} = (K_1^{(i)}, \dots, K_N^{(i)})$ berechnen, indem wir das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{S}^{(0)} \mathbf{K}^{(i)} = \mathbf{b}^{(i)}$$

lösen. Beachte, dass $\mathbf{S}^{(0)}$ nicht von i abhängt.

Die harmonische $M \times M$ -Steifigkeitsmatrix \mathbf{A} ist gegeben durch

$$A_{ij} = \int_{B_h} \nabla K_h^{(i)} \nabla K_h^{(j)} = \int_{B_h} \nabla K_h^{(i)} \nabla \psi_h^{(j)}$$

und lässt sich nach dem Vorangegangenen wie folgt berechnen:

$$A_{ij} = \sum_{l,m=1}^N K_l^{(i)} K_m^{(j)} S_{lm} = \sum_{l=1}^N K_l^{(i)} S_{lj}$$

Desweiteren sind die Basisfunktionen $\zeta_{\frac{h}{2}}^{(\alpha)} \in \overline{\mathcal{H}}_{\frac{h}{2}}$, $\alpha = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, M$ eindeutig bestimmt durch

$$\zeta_{\frac{h}{2}}^{(\alpha)}(\varphi_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \quad \forall \beta = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, M.$$

Für $i = 1, \dots, M$ setzen wir außerdem noch $\gamma_{i-\frac{1}{2}} = \gamma_h(\varphi_{i-\frac{1}{2}}) \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$\gamma_h = \sum_{i=1}^M \gamma_i \zeta_{\frac{h}{2}}^{(i)} + \sum_{i=1}^M \gamma_{i-\frac{1}{2}} \zeta_{\frac{h}{2}}^{(i-\frac{1}{2})}.$$

Proposition 16 Für $\gamma_h \in \mathcal{C}_h$ gilt

$$\begin{aligned} E_h^\lambda(\gamma_h) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M A_{ij} \langle \gamma_i, \gamma_j \rangle + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^M \left(\frac{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} + \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{12} \right) \\ &\quad \cdot \left((\varrho_{i-1} + \varrho_i) |\gamma_{i-1} + \gamma_i - 2P|^2 + 2\varrho_{i-1} |\gamma_{i-1} - P|^2 + 2\varrho_i |\gamma_i - P|^2 \right) \\ &\quad + \frac{\lambda}{4} \sum_{i=1}^M \sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}} \left(G(\gamma_{i-1})^2 + 2G(\gamma_{i-\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_i)^2 \right). \end{aligned}$$

Beweis: Wir formen die Terme in (25) einzeln um. Für den ersten Term gilt mit $\zeta_h^{(i)}(\pi^{-1}) = \psi_h^{(i)}|_{\partial B_h}$ und nach Definition der Matrix \mathbf{A}

$$\begin{aligned} D_h(\Phi_h(\gamma_h(\pi^{-1}))) &= \frac{1}{2} \int_{B_h} \left| \nabla \Phi_h \left(\sum_{i=1}^M \gamma_i \psi_h^{(i)}|_{\partial B_h} \right) \right|^2 = \frac{1}{2} \int_{B_h} \left| \sum_{i=1}^M \gamma_i \nabla K_h^{(i)} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M A_{ij} \langle \gamma_i, \gamma_j \rangle. \end{aligned}$$

Beachten wir, dass die Ableitungen unserer diskreten Funktionen immer stückweise konstant sind, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_{\varphi_{i-\frac{1}{2}}}^{\varphi_i} I_{\frac{h}{2}}(G(\gamma_h)^2) \sqrt{|\gamma_h'|^2 + \frac{1}{\lambda}} d\varphi \\ &= \sqrt{\left| \gamma_{i-1} \zeta_h^{(i-1)'} + \gamma_i \zeta_h^{(i)'} \right|^2 + \frac{1}{\lambda}} \int_{\varphi_{i-\frac{1}{2}}}^{\varphi_i} G(\gamma_{i-\frac{1}{2}})^2 \zeta_{\frac{h}{2}}^{(i-\frac{1}{2})} + G(\gamma_i)^2 \zeta_{\frac{h}{2}}^{(i)} d\varphi \\ &= \sqrt{\left| \gamma_{i-1} \frac{-1}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} + \gamma_i \frac{1}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} \right|^2 + \frac{1}{\lambda}} \\ & \quad \cdot \int_{\varphi_{i-\frac{1}{2}}}^{\varphi_i} G(\gamma_{i-\frac{1}{2}})^2 \frac{\varphi_i - \varphi}{\varphi_i - \varphi_{i-\frac{1}{2}}} + G(\gamma_i)^2 \frac{\varphi - \varphi_{i-\frac{1}{2}}}{\varphi_i - \varphi_{i-\frac{1}{2}}} d\varphi \\ &= \sqrt{\frac{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2}{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2} + \frac{1}{\lambda}} \left(G(\gamma_{i-\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_i)^2 \right) \frac{\varphi_i - \varphi_{i-\frac{1}{2}}}{2} \\ &= \sqrt{\frac{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2}{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2} + \frac{1}{\lambda}} \left(G(\gamma_{i-\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_i)^2 \right) \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{4} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}} \left(G(\gamma_{i-\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_i)^2 \right). \end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_{i-\frac{1}{2}}} I_{\frac{h}{2}}(G(\gamma_h)^2) \sqrt{|\gamma_h'|^2 + \frac{1}{\lambda}} d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}} \left(G(\gamma_{i-1})^2 + G(\gamma_{i-\frac{1}{2}})^2 \right). \end{aligned}$$

Also folgt für den zweiten Term

$$\begin{aligned} & \lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}}(G(\gamma_h)^2) \sqrt{|\gamma_h'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^M \left(\int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_{i-\frac{1}{2}}} I_{\frac{h}{2}}(G(\gamma_h)^2) \sqrt{|\gamma_h'|^2 + \frac{1}{\lambda}} d\varphi \right. \\ & \quad \left. + \int_{\varphi_{i-\frac{1}{2}}}^{\varphi_i} I_{\frac{h}{2}}(G(\gamma_h)^2) \sqrt{|\gamma_h'|^2 + \frac{1}{\lambda}} d\varphi \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda}{4} \sum_{i=1}^M \sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}} \left(G(\gamma_{i-1})^2 + 2G(\gamma_{i-\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_i)^2 \right).$$

Weiter erhalten wir für den vorletzten Term

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \int_{\partial B} |\gamma'_h|^2 &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^M \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \left| \gamma_{i-1} \zeta_h^{(i-1)'} + \gamma_i \zeta_h^{(i)'} \right|^2 d\varphi \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^M (\varphi_i - \varphi_{i-1}) \left| \gamma_{i-1} \frac{-1}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} + \gamma_i \frac{1}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} \right|^2 d\varphi = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^M \frac{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2}{\varphi_i - \varphi_{i-1}}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \zeta_h^{(i-1)3} d\varphi = \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \frac{(\varphi_i - \varphi)^3}{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^3} d\varphi = \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{4}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \zeta_h^{(i-1)2} \zeta_h^{(i)} d\varphi &= \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \frac{(\varphi_i - \varphi)^2 (\varphi - \varphi_{i-1})}{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^3} d\varphi \\ &= \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \frac{(\varphi_i - \varphi)^2}{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2} - \frac{(\varphi_i - \varphi)^3}{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^3} d\varphi = \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{3} - \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{4} = \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{12}. \end{aligned}$$

Analog folgt

$$\int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \zeta_h^{(i)3} d\varphi = \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{4}, \quad \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \zeta_h^{(i-1)2} \zeta_h^{(i)} d\varphi = \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{12},$$

also gilt für den letzten Term

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda} \int_{\partial B} I_h \varrho |\gamma_h - P|^2 \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^M \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \left(\varrho_{i-1} \zeta_h^{(i-1)} + \varrho_i \zeta_h^{(i)} \right) \left| (\gamma_{i-1} - P) \zeta_h^{(i-1)} + (\gamma_i - P) \zeta_h^{(i)} \right|^2 d\varphi \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^M \left(\varrho_{i-1} |\gamma_{i-1} - P|^2 \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \zeta_h^{(i-1)3} d\varphi + \varrho_i |\gamma_i - P|^2 \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \zeta_h^{(i)3} d\varphi \right. \\ &\quad + \left(\varrho_i |\gamma_{i-1} - P|^2 + 2\varrho_{i-1} \langle \gamma_{i-1} - P, \gamma_i - P \rangle \right) \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \zeta_h^{(i-1)2} \zeta_h^{(i)} d\varphi \\ &\quad \left. + \left(\varrho_{i-1} |\gamma_i - P|^2 + 2\varrho_i \langle \gamma_{i-1} - P, \gamma_i - P \rangle \right) \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \zeta_h^{(i-1)} \zeta_h^{(i)2} d\varphi \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^M \left(\varrho_{i-1} |\gamma_{i-1} - P|^2 \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{4} + \varrho_i |\gamma_i - P|^2 \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{4} \right. \\ &\quad + \left(\varrho_i |\gamma_{i-1} - P|^2 + 2\varrho_{i-1} \langle \gamma_{i-1} - P, \gamma_i - P \rangle \right) \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{12} \\ &\quad \left. + \left(\varrho_{i-1} |\gamma_i - P|^2 + 2\varrho_i \langle \gamma_{i-1} - P, \gamma_i - P \rangle \right) \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{12} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^M \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{12} \end{aligned}$$

$$\cdot \left((\varrho_{i-1} + \varrho_i) |\gamma_{i-1} + \gamma_i - 2P|^2 + 2\varrho_{i-1} |\gamma_{i-1} - P|^2 + 2\varrho_i |\gamma_i - P|^2 \right).$$

□

Corollar 17 *Es gilt $E_h^\lambda(\gamma_h) \in C^2(\mathcal{C}_h, \mathbb{R})$.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus der Darstellung von $E_h^\lambda(\gamma_h)$ in der obigen Proposition. □

Proposition 18 *Es gilt*

$$\begin{aligned} \delta E_h^\lambda(\gamma_h)(\xi_h) &= \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{j=1}^M A_{ij} \gamma_j^{(k)} + \frac{2}{\lambda} \frac{\gamma_i^{(k)} - \gamma_{i-1}^{(k)}}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} - \frac{2}{\lambda} \frac{\gamma_{i+1}^{(k)} - \gamma_i^{(k)}}{\varphi_{i+1} - \varphi_i} \right. \\ &+ \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{6\lambda} \left((\varrho_{i-1} + \varrho_i) (\gamma_{i-1}^{(k)} + \gamma_i^{(k)} - 2P^{(k)}) + 2\varrho_i (\gamma_i^{(k)} - P^{(k)}) \right) \\ &+ \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{6\lambda} \left((\varrho_i + \varrho_{i+1}) (\gamma_i^{(k)} + \gamma_{i+1}^{(k)} - 2P^{(k)}) + 2\varrho_i (\gamma_i^{(k)} - P^{(k)}) \right) \\ &+ \frac{\lambda}{2} \sqrt{|\gamma_{i+1} - \gamma_i|^2 + \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2}{\lambda}} \left(G(\gamma_i) D_k G(\gamma_i) + G(\gamma_{i+\frac{1}{2}}) D_k G(\gamma_{i+\frac{1}{2}}) \right) \\ &+ \frac{\lambda}{2} \sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}} \left(G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}) D_k G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}) + G(\gamma_i) D_k G(\gamma_i) \right) \\ &+ \frac{\lambda}{4} \frac{\gamma_i^{(k)} - \gamma_{i-1}^{(k)}}{\sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}}} \left(G(\gamma_{i-1})^2 + 2G(\gamma_{i-\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_i)^2 \right) \\ &+ \frac{\lambda}{4} \frac{\gamma_i^{(k)} - \gamma_{i+1}^{(k)}}{\sqrt{|\gamma_{i+1} - \gamma_i|^2 + \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2}{\lambda}}} \left(G(\gamma_i)^2 + 2G(\gamma_{i+\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_{i+1})^2 \right) \Bigg) \xi_i^{(k)}. \end{aligned}$$

Beweis: Wir formen die Terme in (26) wieder einzeln um. Nach Definition von **A** erhalten wir für den ersten Term

$$\int_{B_h} \langle \nabla \Phi_h(\gamma_h(\pi^{-1})), \nabla \Phi_h(\xi_h(\pi^{-1})) \rangle = \sum_{i,j=1}^M A_{ij} \langle \gamma_j, \xi_i \rangle.$$

Im Folgenden lassen wir Zwischenschritte weg, die analog zum Beweis von Proposition 16 verlaufen, ohne dies jedesmal explizit zu erwähnen. Beachten wir, dass $\xi(\varphi_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{\xi_{i-1} + \xi_i}{2}$, dann gilt

$$\begin{aligned} &2\lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}}(G(\gamma_h) \langle \nabla G(\gamma_h), \xi_h \rangle) \sqrt{|\gamma'_h|^2 + \frac{1}{\lambda}} \\ &= \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^M \sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}} \left(G(\gamma_{i-1}) \langle \nabla G(\gamma_{i-1}), \xi_{i-1} \rangle \right. \\ &\quad \left. + 2G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}) \left\langle \nabla G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}), \frac{\xi_{i-1} + \xi_i}{2} \right\rangle + G(\gamma_i) \langle \nabla G(\gamma_i), \xi_i \rangle \right) \\ &= \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^M \sqrt{|\gamma_{i+1} - \gamma_i|^2 + \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2}{\lambda}} \\ &\quad \cdot \left(G(\gamma_i) \langle \nabla G(\gamma_i), \xi_i \rangle + G(\gamma_{i+\frac{1}{2}}) \langle \nabla G(\gamma_{i+\frac{1}{2}}), \xi_i \rangle \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^M \sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}} \\
& \cdot \left(G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}) \langle \nabla G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}), \xi_i \rangle + G(\gamma_i) \langle \nabla G(\gamma_i), \xi_i \rangle \right)
\end{aligned}$$

mit einer Indexverschiebung. Berücksichtigen wir wieder, dass die Ableitungen der diskreten Funktionen stückweise konstant sind, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \int_{\varphi_{i-\frac{1}{2}}}^{\varphi_i} I_{\frac{h}{2}} (G(\gamma_h)^2) \frac{\langle \gamma'_h, \xi'_h \rangle}{\sqrt{|\gamma'_h|^2 + \frac{1}{\lambda}}} d\varphi \\
& = \frac{\left\langle \gamma_{i-1} \zeta_h^{(i-1)'} + \gamma_i \zeta_h^{(i)'}, \xi_{i-1} \zeta_h^{(i-1)'} + \xi_i \zeta_h^{(i)'} \right\rangle}{\sqrt{\left| \gamma_{i-1} \zeta_h^{(i-1)'} + \gamma_i \zeta_h^{(i)'} \right|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \\
& \cdot \int_{\varphi_{i-\frac{1}{2}}}^{\varphi_i} G(\gamma_{i-\frac{1}{2}})^2 \zeta_{\frac{h}{2}}^{(i-\frac{1}{2})} + G(\gamma_i)^2 \zeta_{\frac{h}{2}}^{(i)} d\varphi \\
& = \frac{\left\langle \frac{1}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} (\gamma_i - \gamma_{i-1}), \frac{1}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} (\xi_i - \xi_{i-1}) \right\rangle}{\sqrt{\frac{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2}{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2} + \frac{1}{\lambda}}} \left(G(\gamma_{i-\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_i)^2 \right) \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{4} \\
& = \frac{1}{4} \frac{\langle \gamma_i - \gamma_{i-1}, \xi_i - \xi_{i-1} \rangle}{\sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}}} \left(G(\gamma_{i-\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_i)^2 \right).
\end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_{i-\frac{1}{2}}} I_{\frac{h}{2}} (G(\gamma_h)^2) \frac{\langle \gamma'_h, \xi'_h \rangle}{\sqrt{|\gamma'_h|^2 + \frac{1}{\lambda}}} d\varphi \\
& = \frac{1}{4} \frac{\langle \gamma_i - \gamma_{i-1}, \xi_i - \xi_{i-1} \rangle}{\sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}}} \left(G(\gamma_{i-1})^2 + G(\gamma_{i-\frac{1}{2}})^2 \right).
\end{aligned}$$

Also folgt für den dritten Term

$$\begin{aligned}
& \lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (G(\gamma_h)^2) \frac{\langle \gamma'_h, \xi'_h \rangle}{\sqrt{|\gamma'_h|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \\
& = \lambda \sum_{i=1}^M \left(\int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_{i-\frac{1}{2}}} I_{\frac{h}{2}} (G(\gamma_h)^2) \frac{\langle \gamma'_h, \xi'_h \rangle}{\sqrt{|\gamma'_h|^2 + \frac{1}{\lambda}}} d\varphi \right. \\
& \quad \left. + \int_{\varphi_{i-\frac{1}{2}}}^{\varphi_i} I_{\frac{h}{2}} (G(\gamma_h)^2) \frac{\langle \gamma'_h, \xi'_h \rangle}{\sqrt{|\gamma'_h|^2 + \frac{1}{\lambda}}} d\varphi \right) \\
& = \frac{\lambda}{4} \sum_{i=1}^M \frac{\langle \gamma_i - \gamma_{i-1}, \xi_i - \xi_{i-1} \rangle}{\sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}}} \left(G(\gamma_{i-1})^2 + 2G(\gamma_{i-\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_i)^2 \right) \\
& = \frac{\lambda}{4} \sum_{i=1}^M \frac{\langle \gamma_i - \gamma_{i-1}, \xi_i \rangle}{\sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}}} \left(G(\gamma_{i-1})^2 + 2G(\gamma_{i-\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_i)^2 \right)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\lambda}{4} \sum_{i=1}^M \frac{\langle \gamma_i - \gamma_{i+1}, \xi_i \rangle}{\sqrt{|\gamma_{i+1} - \gamma_i|^2 + \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2}{\lambda}}} \left(G(\gamma_i)^2 + 2G(\gamma_{i+\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_{i+1})^2 \right).$$

Wir haben für den vorletzten Term

$$\begin{aligned} \frac{2}{\lambda} \int_{\partial B} \langle \gamma'_h, \xi'_h \rangle &= \frac{2}{\lambda} \sum_{i=1}^M \frac{\langle \gamma_i - \gamma_{i-1}, \xi_i - \xi_{i-1} \rangle}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} \\ &= \frac{2}{\lambda} \sum_{i=1}^M \frac{\langle \gamma_i - \gamma_{i-1}, \xi_i \rangle}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} - \frac{2}{\lambda} \sum_{i=1}^M \frac{\langle \gamma_{i+1} - \gamma_i, \xi_i \rangle}{\varphi_{i+1} - \varphi_i}. \end{aligned}$$

Für den letzten Term gilt schließlich

$$\begin{aligned} \frac{2}{\lambda} \int_{\partial B} I_h \varrho \langle \gamma_h - P, \xi_h \rangle &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^M \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{6} \left((\varrho_{i-1} + \varrho_i) \right. \\ &\quad \cdot \langle \gamma_{i-1} + \gamma_i - 2P, \xi_{i-1} + \xi_i \rangle + 2\varrho_{i-1} \langle \gamma_{i-1} - P, \xi_{i-1} \rangle + 2\varrho_i \langle \gamma_i - P, \xi_i \rangle \Big) \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^M \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{6} \left((\varrho_{i-1} + \varrho_i) \langle \gamma_{i-1} + \gamma_i - 2P, \xi_i \rangle + 2\varrho_i \langle \gamma_i - P, \xi_i \rangle \right) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^M \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{6} \left((\varrho_i + \varrho_{i+1}) \langle \gamma_i + \gamma_{i+1} - 2P, \xi_i \rangle + 2\varrho_i \langle \gamma_i - P, \xi_i \rangle \right). \end{aligned}$$

Durch Ausschreiben der Skalarprodukte und Umstellen erhalten wir die Behauptung. \square

Proposition 19 *Es gilt*

$$\begin{aligned} \delta^2 E_h^\lambda(\gamma_h)(\xi_h, \eta_h) &= \sum_{i,j=1}^M \sum_{k,l=1}^3 \left(A_{ij} \delta_{kl} + \frac{2}{\lambda} \delta_{kl} \frac{\delta_{ij} - \delta_{i(j-1)}}{\varphi_{i+1} - \varphi_i} + \frac{2}{\lambda} \delta_{kl} \frac{\delta_{ij} - \delta_{i(j+1)}}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} \right. \\ &\quad + \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{6\lambda} \delta_{kl} \left((\varrho_{i-1} + \varrho_i) (\delta_{i(j+1)} + \delta_{ij}) + 2\varrho_i \delta_{ij} \right) \\ &\quad + \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{6\lambda} \delta_{kl} \left((\varrho_i + \varrho_{i+1}) (\delta_{ij} + \delta_{i(j-1)}) + 2\varrho_i \delta_{ij} \right) \\ &\quad + \frac{\lambda}{4} \sqrt{|\gamma_{i+1} - \gamma_i|^2 + \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2}{\lambda}} \left(2\delta_{ij} (D_k G(\gamma_i) D_l G(\gamma_i) + G(\gamma_i) D_{kl} G(\gamma_i)) \right. \\ &\quad \left. + (\delta_{i(j-1)} + \delta_{ij}) \left(D_k G(\gamma_{i+\frac{1}{2}}) D_l G(\gamma_{i+\frac{1}{2}}) + G(\gamma_{i+\frac{1}{2}}) D_{kl} G(\gamma_{i+\frac{1}{2}}) \right) \right) \\ &\quad + \frac{\lambda}{4} \sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}} \left(2\delta_{ij} (D_k G(\gamma_i) D_l G(\gamma_i) + G(\gamma_i) D_{kl} G(\gamma_i)) \right. \\ &\quad \left. + (\delta_{ij} + \delta_{i(j+1)}) \left(D_k G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}) D_l G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}) + G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}) D_{kl} G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}) \right) \right) \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \frac{(\delta_{i(j-1)} - \delta_{ij}) \left(\gamma_{i+1}^{(l)} - \gamma_i^{(l)} \right)}{\sqrt{|\gamma_{i+1} - \gamma_i|^2 + \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2}{\lambda}}} \left(G(\gamma_i) D_k G(\gamma_i) + G(\gamma_{i+\frac{1}{2}}) D_k G(\gamma_{i+\frac{1}{2}}) \right) \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \frac{(\delta_{ij} - \delta_{i(j+1)}) \left(\gamma_i^{(l)} - \gamma_{i-1}^{(l)} \right)}{\sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}}} \left(G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}) D_k G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}) + G(\gamma_i) D_k G(\gamma_i) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda}{2} \frac{(\delta_{(i-1)j} - \delta_{ij}) \left(\gamma_{j+1}^{(k)} - \gamma_j^{(k)} \right)}{\sqrt{|\gamma_{j+1} - \gamma_j|^2 + \frac{(\varphi_{j+1} - \varphi_j)^2}{\lambda}}} \left(G(\gamma_j) D_l G(\gamma_j) + G(\gamma_{j+\frac{1}{2}}) D_l G(\gamma_{j+\frac{1}{2}}) \right) \\
& + \frac{\lambda}{2} \frac{(\delta_{ij} - \delta_{(i+1)j}) \left(\gamma_j^{(k)} - \gamma_{j-1}^{(k)} \right)}{\sqrt{|\gamma_j - \gamma_{j-1}|^2 + \frac{(\varphi_j - \varphi_{j-1})^2}{\lambda}}} \left(G(\gamma_{j-\frac{1}{2}}) D_l G(\gamma_{j-\frac{1}{2}}) + G(\gamma_j) D_l G(\gamma_j) \right) \\
& + \frac{\lambda}{4} \frac{(\delta_{i(j-1)} - \delta_{ij}) \left(\gamma_{i+1}^{(k)} - \gamma_i^{(k)} \right) \left(\gamma_{i+1}^{(l)} - \gamma_i^{(l)} \right)}{\left(|\gamma_{i+1} - \gamma_i|^2 + \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2}{\lambda} \right)^{\frac{3}{2}}} \left(G(\gamma_i)^2 + 2G(\gamma_{i+\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_{i+1})^2 \right) \\
& + \frac{\lambda}{4} \frac{(\delta_{i(j+1)} - \delta_{ij}) \left(\gamma_i^{(k)} - \gamma_{i-1}^{(k)} \right) \left(\gamma_i^{(l)} - \gamma_{i-1}^{(l)} \right)}{\left(|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda} \right)^{\frac{3}{2}}} \left(G(\gamma_{i-1})^2 + 2G(\gamma_{i-\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_i)^2 \right) \\
& + \frac{\lambda}{4} \frac{\delta_{kl}(\delta_{ij} - \delta_{i(j-1)})}{\sqrt{|\gamma_{i+1} - \gamma_i|^2 + \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2}{\lambda}}} \left(G(\gamma_i)^2 + 2G(\gamma_{i+\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_{i+1})^2 \right) \\
& + \frac{\lambda}{4} \frac{\delta_{kl}(\delta_{ij} - \delta_{i(j+1)})}{\sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}}} \left(G(\gamma_{i-1})^2 + 2G(\gamma_{i-\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_i)^2 \right) \Big) \xi_i^{(k)} \eta_j^{(l)}.
\end{aligned}$$

Beweis: Wir formen die Terme in (27) einzeln um. Nach Definition von \mathbf{A} erhalten wir wieder für den ersten Term

$$\int_{B_h} \langle \nabla \Phi_h(\xi_h(\pi^{-1})), \nabla \Phi_h(\eta_h(\pi^{-1})) \rangle = \sum_{i,j=1}^M A_{ij} \langle \xi_i, \eta_j \rangle.$$

Auch hier werden wir Zwischenschritte weglassen, die analog zu den Beweisen von Proposition 16 und 18 verlaufen. Für den zweiten Term gilt

$$\begin{aligned}
& 2\lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (\langle \nabla G(\gamma_h), \xi_h \rangle \langle \nabla G(\gamma_h), \eta_h \rangle) \sqrt{|\gamma'_h|^2 + \frac{1}{\lambda}} \\
& = \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^M \sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}} \left(\langle \nabla G(\gamma_{i-1}), \xi_{i-1} \rangle \langle \nabla G(\gamma_{i-1}), \eta_{i-1} \rangle \right. \\
& \quad + 2 \left\langle \nabla G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}), \frac{\xi_{i-1} + \xi_i}{2} \right\rangle \left\langle \nabla G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}), \frac{\eta_{i-1} + \eta_i}{2} \right\rangle \\
& \quad \left. + \langle \nabla G(\gamma_i), \xi_i \rangle \langle \nabla G(\gamma_i), \eta_i \rangle \right) \\
& = \frac{\lambda}{4} \sum_{i=1}^M \sqrt{|\gamma_{i+1} - \gamma_i|^2 + \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2}{\lambda}} \\
& \quad \cdot \left(2 \langle \nabla G(\gamma_i), \xi_i \rangle \langle \nabla G(\gamma_i), \eta_i \rangle + \langle \nabla G(\gamma_{i+\frac{1}{2}}), \xi_i \rangle \langle \nabla G(\gamma_{i+\frac{1}{2}}), \eta_i + \eta_{i+1} \rangle \right) \\
& \quad + \frac{\lambda}{4} \sum_{i=1}^M \sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}} \\
& \quad \cdot \left(2 \langle \nabla G(\gamma_i), \xi_i \rangle \langle \nabla G(\gamma_i), \eta_i \rangle + \langle \nabla G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}), \xi_i \rangle \langle \nabla G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}), \eta_{i-1} + \eta_i \rangle \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda}{4} \sum_{i,j=1}^M \sqrt{|\gamma_{i+1} - \gamma_i|^2 + \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2}{\lambda}} \\
&\quad \cdot \left(2\delta_{ij} \langle \nabla G(\gamma_i), \xi_i \rangle \langle \nabla G(\gamma_i), \eta_j \rangle + (\delta_{i(j-1)} + \delta_{ij}) \langle \nabla G(\gamma_{i+\frac{1}{2}}), \xi_i \rangle \langle \nabla G(\gamma_{i+\frac{1}{2}}), \eta_j \rangle \right) \\
&\quad + \frac{\lambda}{4} \sum_{i,j=1}^M \sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}} \\
&\quad \cdot \left(2\delta_{ij} \langle \nabla G(\gamma_i), \xi_i \rangle \langle \nabla G(\gamma_i), \eta_j \rangle + (\delta_{ij} + \delta_{i(j+1)}) \langle \nabla G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}), \xi_i \rangle \langle \nabla G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}), \eta_j \rangle \right)
\end{aligned}$$

und analog für den dritten Term

$$\begin{aligned}
&2\lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}}(G(\gamma_h) \langle \xi_h, \nabla^2 G(\gamma_h) \eta_h \rangle) \sqrt{|\gamma'_h|^2 + \frac{1}{\lambda}} \\
&= \frac{\lambda}{4} \sum_{i,j=1}^M \sqrt{|\gamma_{i+1} - \gamma_i|^2 + \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2}{\lambda}} \\
&\quad \cdot \left(2\delta_{ij} G(\gamma_i) \langle \xi_i, \nabla^2 G(\gamma_i) \eta_j \rangle + (\delta_{i(j-1)} + \delta_{ij}) G(\gamma_{i+\frac{1}{2}}) \langle \xi_i, \nabla^2 G(\gamma_{i+\frac{1}{2}}) \eta_j \rangle \right) \\
&\quad + \frac{\lambda}{4} \sum_{i,j=1}^M \sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}} \\
&\quad \cdot \left(2\delta_{ij} G(\gamma_i) \langle \xi_i, \nabla^2 G(\gamma_i) \eta_j \rangle + (\delta_{ij} + \delta_{i(j+1)}) G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}) \langle \xi_i, \nabla^2 G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}) \eta_j \rangle \right).
\end{aligned}$$

Weiterhin haben wir für den vierten Term

$$\begin{aligned}
&2\lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}}(G(\gamma_h) \langle \nabla G(\gamma_h), \xi_h \rangle) \frac{\langle \gamma'_h, \eta'_h \rangle}{\sqrt{|\gamma'_h|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \\
&= \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^M \frac{\langle \gamma_i - \gamma_{i-1}, \eta_i - \eta_{i-1} \rangle}{\sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}}} \left(G(\gamma_{i-1}) \langle \nabla G(\gamma_{i-1}), \xi_{i-1} \rangle \right. \\
&\quad \left. + 2G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}) \left\langle \nabla G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}), \frac{\xi_{i-1} + \xi_i}{2} \right\rangle + G(\gamma_i) \langle \nabla G(\gamma_i), \xi_i \rangle \right) \\
&= \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^M \frac{\langle \gamma_{i+1} - \gamma_i, \eta_{i+1} - \eta_i \rangle}{\sqrt{|\gamma_{i+1} - \gamma_i|^2 + \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2}{\lambda}}} \\
&\quad \cdot \left(G(\gamma_i) \langle \nabla G(\gamma_i), \xi_i \rangle + G(\gamma_{i+\frac{1}{2}}) \langle \nabla G(\gamma_{i+\frac{1}{2}}), \xi_i \rangle \right) \\
&\quad + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^M \frac{\langle \gamma_i - \gamma_{i-1}, \eta_i - \eta_{i-1} \rangle}{\sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}}} \\
&\quad \cdot \left(G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}) \langle \nabla G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}), \xi_i \rangle + G(\gamma_i) \langle \nabla G(\gamma_i), \xi_i \rangle \right) \\
&= \frac{\lambda}{2} \sum_{i,j=1}^M \frac{(\delta_{i(j-1)} - \delta_{ij}) \langle \gamma_{i+1} - \gamma_i, \eta_j \rangle}{\sqrt{|\gamma_{i+1} - \gamma_i|^2 + \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2}{\lambda}}} \\
&\quad \cdot \left(G(\gamma_i) \langle \nabla G(\gamma_i), \xi_i \rangle + G(\gamma_{i+\frac{1}{2}}) \langle \nabla G(\gamma_{i+\frac{1}{2}}), \xi_i \rangle \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda}{2} \sum_{i,j=1}^M \frac{(\delta_{ij} - \delta_{i(j+1)}) \langle \gamma_i - \gamma_{i-1}, \eta_j \rangle}{\sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}}} \\
& \cdot \left(G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}) \langle \nabla G(\gamma_{i-\frac{1}{2}}), \xi_i \rangle + G(\gamma_i) \langle \nabla G(\gamma_i), \xi_i \rangle \right)
\end{aligned}$$

und aus Symmetriegründen für den fünften Term

$$\begin{aligned}
& 2\lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (G(\gamma_h) \langle \nabla G(\gamma_h), \eta_h \rangle) \frac{\langle \gamma'_h, \xi'_h \rangle}{\sqrt{|\gamma'_h|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \\
& = \frac{\lambda}{2} \sum_{i,j=1}^M \frac{(\delta_{(i-1)j} - \delta_{ij}) \langle \gamma_{j+1} - \gamma_j, \xi_i \rangle}{\sqrt{|\gamma_{j+1} - \gamma_j|^2 + \frac{(\varphi_{j+1} - \varphi_j)^2}{\lambda}}} \\
& \cdot \left(G(\gamma_j) \langle \nabla G(\gamma_j), \eta_j \rangle + G(\gamma_{j+\frac{1}{2}}) \langle \nabla G(\gamma_{j+\frac{1}{2}}), \eta_j \rangle \right) \\
& + \frac{\lambda}{2} \sum_{i,j=1}^M \frac{(\delta_{ij} - \delta_{(i+1)j}) \langle \gamma_j - \gamma_{j-1}, \xi_i \rangle}{\sqrt{|\gamma_j - \gamma_{j-1}|^2 + \frac{(\varphi_j - \varphi_{j-1})^2}{\lambda}}} \\
& \cdot \left(G(\gamma_{j-\frac{1}{2}}) \langle \nabla G(\gamma_{j-\frac{1}{2}}), \eta_j \rangle + G(\gamma_j) \langle \nabla G(\gamma_j), \eta_j \rangle \right).
\end{aligned}$$

Ähnlich wie in den obigen Beweisen ergibt sich für den sechsten Term

$$\begin{aligned}
& \lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (G(\gamma_h)^2) \frac{\langle \xi'_h, \eta'_h \rangle (|\gamma'_h|^2 + \frac{1}{\lambda}) - \langle \gamma'_h, \xi'_h \rangle \langle \gamma'_h, \eta'_h \rangle}{(|\gamma'_h|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{2}}} \\
& = \frac{\lambda}{4} \sum_{i=1}^M \frac{\langle \xi_i - \xi_{i-1}, \eta_i - \eta_{i-1} \rangle}{\sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}}} \left(G(\gamma_{i-1})^2 + 2G(\gamma_{i-\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_i)^2 \right) \\
& - \frac{\lambda}{4} \sum_{i=1}^M \frac{\langle \gamma_i - \gamma_{i-1}, \xi_i - \xi_{i-1} \rangle \langle \gamma_i - \gamma_{i-1}, \eta_i - \eta_{i-1} \rangle}{\left(|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda} \right)^{\frac{3}{2}}} \\
& \cdot \left(G(\gamma_{i-1})^2 + 2G(\gamma_{i-\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_i)^2 \right) \\
& = \frac{\lambda}{4} \sum_{i=1}^M \frac{\langle \xi_i, \eta_i - \eta_{i+1} \rangle}{\sqrt{|\gamma_{i+1} - \gamma_i|^2 + \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2}{\lambda}}} \left(G(\gamma_i)^2 + 2G(\gamma_{i+\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_{i+1})^2 \right) \\
& + \frac{\lambda}{4} \sum_{i=1}^M \frac{\langle \xi_i, \eta_i - \eta_{i-1} \rangle}{\sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}}} \left(G(\gamma_{i-1})^2 + 2G(\gamma_{i-\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_i)^2 \right) \\
& + \frac{\lambda}{4} \sum_{i=1}^M \frac{\langle \gamma_{i+1} - \gamma_i, \xi_i \rangle \langle \gamma_{i+1} - \gamma_i, \eta_{i+1} - \eta_i \rangle}{\left(|\gamma_{i+1} - \gamma_i|^2 + \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2}{\lambda} \right)^{\frac{3}{2}}} \left(G(\gamma_i)^2 + 2G(\gamma_{i+\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_{i+1})^2 \right) \\
& + \frac{\lambda}{4} \sum_{i=1}^M \frac{\langle \gamma_i - \gamma_{i-1}, \xi_i \rangle \langle \gamma_i - \gamma_{i-1}, \eta_{i-1} - \eta_i \rangle}{\left(|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda} \right)^{\frac{3}{2}}} \left(G(\gamma_{i-1})^2 + 2G(\gamma_{i-\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_i)^2 \right) \\
& = \frac{\lambda}{4} \sum_{i,j=1}^M \frac{(\delta_{ij} - \delta_{i(j-1)}) \langle \xi_i, \eta_j \rangle}{\sqrt{|\gamma_{i+1} - \gamma_i|^2 + \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2}{\lambda}}} \left(G(\gamma_i)^2 + 2G(\gamma_{i+\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_{i+1})^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda}{4} \sum_{i,j=1}^M \frac{(\delta_{ij} - \delta_{i(j+1)}) \langle \xi_i, \eta_j \rangle}{\sqrt{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda}}} \left(G(\gamma_{i-1})^2 + 2G(\gamma_{i-\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_i)^2 \right) \\
& + \frac{\lambda}{4} \sum_{i,j=1}^M \frac{(\delta_{i(j-1)} - \delta_{ij}) \langle \gamma_{i+1} - \gamma_i, \xi_i \rangle \langle \gamma_{i+1} - \gamma_i, \eta_j \rangle}{\left(|\gamma_{i+1} - \gamma_i|^2 + \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2}{\lambda} \right)^{\frac{3}{2}}} \\
& \quad \cdot \left(G(\gamma_i)^2 + 2G(\gamma_{i+\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_{i+1})^2 \right) \\
& + \frac{\lambda}{4} \sum_{i,j=1}^M \frac{(\delta_{i(j+1)} - \delta_{ij}) \langle \gamma_i - \gamma_{i-1}, \xi_i \rangle \langle \gamma_i - \gamma_{i-1}, \eta_j \rangle}{\left(|\gamma_i - \gamma_{i-1}|^2 + \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})^2}{\lambda} \right)^{\frac{3}{2}}} \\
& \quad \cdot \left(G(\gamma_{i-1})^2 + 2G(\gamma_{i-\frac{1}{2}})^2 + G(\gamma_i)^2 \right).
\end{aligned}$$

Wir haben für den vorletzten Term

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\lambda} \int_{\partial B} \langle \xi'_h, \eta'_h \rangle &= \frac{2}{\lambda} \sum_{i=1}^M \frac{\langle \xi_i - \xi_{i-1}, \eta_i - \eta_{i-1} \rangle}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} \\
&= \frac{2}{\lambda} \sum_{i=1}^M \frac{\langle \xi_i, \eta_i - \eta_{i+1} \rangle}{\varphi_{i+1} - \varphi_i} + \frac{2}{\lambda} \sum_{i=1}^M \frac{\langle \xi_i, \eta_i - \eta_{i-1} \rangle}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} \\
&= \frac{2}{\lambda} \sum_{i,j=1}^M \frac{(\delta_{ij} - \delta_{i(j-1)}) \langle \xi_i, \eta_j \rangle}{\varphi_{i+1} - \varphi_i} + \frac{2}{\lambda} \sum_{i,j=1}^M \frac{(\delta_{ij} - \delta_{i(j+1)}) \langle \xi_i, \eta_j \rangle}{\varphi_i - \varphi_{i-1}}.
\end{aligned}$$

Für den letzten Term gilt schließlich

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\lambda} \int_{\partial B} I_h \varrho \langle \xi_h, \eta_h \rangle &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^M \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{6} \\
& \quad \cdot \left((\varrho_{i-1} + \varrho_i) \langle \xi_{i-1} + \xi_i, \eta_{i-1} + \eta_i \rangle + 2\varrho_{i-1} \langle \xi_{i-1}, \eta_{i-1} \rangle + 2\varrho_i \langle \xi_i, \eta_i \rangle \right) \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^M \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{6} \left((\varrho_{i-1} + \varrho_i) \langle \xi_i, \eta_{i-1} + \eta_i \rangle + 2\varrho_i \langle \xi_i, \eta_i \rangle \right) \\
& \quad + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^M \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{6} \left((\varrho_i + \varrho_{i+1}) \langle \xi_i, \eta_i + \eta_{i+1} \rangle + 2\varrho_i \langle \xi_i, \eta_i \rangle \right) \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{i,j=1}^M \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{6} \left((\varrho_{i-1} + \varrho_i) (\delta_{i(j+1)} + \delta_{ij}) \langle \xi_i, \eta_j \rangle + 2\varrho_i \delta_{ij} \langle \xi_i, \eta_j \rangle \right) \\
& \quad + \frac{1}{\lambda} \sum_{i,j=1}^M \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{6} \left((\varrho_i + \varrho_{i+1}) (\delta_{ij} + \delta_{i(j-1)}) \langle \xi_i, \eta_j \rangle + 2\varrho_i \delta_{ij} \langle \xi_i, \eta_j \rangle \right).
\end{aligned}$$

Durch Ausschreiben der Skalarprodukte und Umstellen erhalten wir die Behauptung. \square

11 Vorbereitende Abschätzungen

In diesem Kapitel beweisen wir einige Abschätzungen, die wir später für die Fehlerabschätzung benötigen. Zuerst geben wir hier kurz zwei elementare Interpolationsabschätzungen an, die wir häufig verwenden werden:

Proposition 20 Sei $\gamma \in H_2^1((a, b), \mathbb{R}^n)$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_M = b$ und $h_i = x_{i+1} - x_i < h$ für alle $i = 0, \dots, M-1$. Dann gilt

$$\|\gamma - I_h \gamma\|_{L_2((a, b))} \leq h |\gamma|_{H_2^1((a, b))}, \quad (28)$$

wobei I_h die übliche lineare Interpolierende ist. Sei zusätzlich $\gamma \in H_2^2((a, b), \mathbb{R}^n)$, dann gilt

$$\|\gamma - I_h \gamma\|_{H_2^1((a, b))} \leq h |\gamma|_{H_2^2((a, b))}. \quad (29)$$

Beweis: Wir nehmen zuerst an, dass $\gamma: (a, b) \mapsto \mathbb{R}$. Für $x \in (x_i, x_{i+1})$ gilt

$$\begin{aligned} |\gamma(x) - I_h \gamma(x)| &= \left| \gamma(x) - \frac{\gamma(x_i)(x_{i+1} - x)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{\gamma(x_{i+1})(x - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right| \\ &= \left| \frac{\gamma(x)(x_{i+1} - x)}{x_{i+1} - x_i} + \frac{\gamma(x)(x - x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{\gamma(x_i)(x_{i+1} - x)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{\gamma(x_{i+1})(x - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right| \\ &\leq \left| \frac{(\gamma(x) - \gamma(x_i))(x_{i+1} - x)}{x_{i+1} - x_i} \right| + \left| \frac{(\gamma(x) - \gamma(x_{i+1}))(x - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right| \\ &\leq |\gamma(x) - \gamma(x_i)| + |\gamma(x) - \gamma(x_{i+1})| = \left| \int_{x_i}^x \gamma'(t) dt \right| + \left| \int_x^{x_{i+1}} \gamma'(t) dt \right| \\ &\leq \int_{x_i}^x |\gamma'(t)| dt + \int_x^{x_{i+1}} |\gamma'(t)| dt = \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\gamma'(t)| dt. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} \|\gamma - I_h \gamma\|_{L_2((a, b))}^2 &= \sum_{i=0}^{M-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\gamma(x) - I_h \gamma(x)|^2 dx \\ &\leq \sum_{i=0}^{M-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |\gamma'(t)| dt \right)^2 dx = \sum_{i=0}^{M-1} h_i \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |\gamma'(t)| dt \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=0}^{M-1} h_i^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\gamma'(t)|^2 dt \leq h^2 |\gamma|_{H_2^1((a, b))}^2. \end{aligned}$$

Haben wir allgemeiner $\gamma: (a, b) \mapsto \mathbb{R}^n$, dann gilt obige Ungleichung für alle Komponenten von γ und folglich:

$$\|\gamma - I_h \gamma\|_{L_2((a, b))}^2 = \sum_{i=1}^n \|\gamma^i - (I_h \gamma)^i\|_{L_2((a, b))}^2 \leq \sum_{i=1}^n h^2 |\gamma^i|_{H_2^1((a, b))}^2 = h^2 |\gamma|_{H_2^1((a, b))}^2$$

Die zweite Abschätzung wird sehr ähnlich mit Hilfe des Mittelwertsatzes bewiesen. (Siehe z.B. [2], Kap. 5.4 für die eindimensionale Version, die allgemeinere folgt wie oben.) \square

In einigen Fällen lässt sich die Norm der Interpolierenden einer Funktion einfach gegen die Norm der Funktion selbst abschätzen: (Beachte aber, dass eine entsprechende Aussage für die L_2 -Norm nicht gilt.)

Proposition 21 Sei $\gamma \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_M = b$ und $h_j = t_{j+1} - t_j < h$ für alle $j = 0, \dots, M-1$. Dann gilt

$$\|I_h \gamma\|_{C^0([a, b])} \leq \|\gamma\|_{C^0([a, b])}. \quad (30)$$

Sei $\gamma \in H_2^1((a, b), \mathbb{R}^n)$, dann gilt

$$|I_h \gamma|_{H_2^1((a, b))} \leq |\gamma|_{H_2^1((a, b))}. \quad (31)$$

Beweis: Die erste Ungleichung ist klar! Zum Beweis der zweiten betrachten wir die Funktionen $\varphi_j(t) := |\gamma(t) - \gamma(t_{j-1})|$ für $j = 1, \dots, M$. Da $\gamma \in H_2^1((a, b))$, ist γ absolutstetig und wegen $|\varphi_j(s) - \varphi_j(t)| \leq |\gamma(s) - \gamma(t)|$ sind auch die φ_j absolutstetig, also für fast alle $s \in (a, b)$ differenzierbar. Falls $\gamma(s) \neq \gamma(t_{j-1})$, gilt

$$|\varphi_j'(s)| = \left| \frac{\langle \gamma(s) - \gamma(t_{j-1}), \gamma'(s) \rangle}{|\gamma(s) - \gamma(t_{j-1})|} \right| \leq |\gamma'(s)|,$$

falls $\gamma(s) = \gamma(t_{j-1})$ folgt

$$|\varphi_j'(s)| = \left| \lim_{t \rightarrow s} \frac{|\gamma(t) - \gamma(s)|}{t - s} \right| = 0 \leq |\gamma'(s)|.$$

Insgesamt haben wir also $|\varphi_j'(s)| \leq |\gamma'(s)|$ für fast alle $s \in (a, b)$ und es folgt

$$\begin{aligned} |I_h \gamma|_{H_2^1((a, b))}^2 &= \sum_{j=1}^M \frac{|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|^2}{t_j - t_{j-1}} = \sum_{j=1}^M \frac{\varphi_j(t_j)^2}{t_j - t_{j-1}} \\ &= \sum_{j=1}^M \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j'(s) ds \right)^2 \leq \sum_{j=1}^M \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j'(s)^2 ds \leq \int_a^b |\gamma'(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

□

Nun berechnen wir die Lipschitzkonstanten einiger Funktionen, die im Folgenden immer wieder vorkommen.

Proposition 22 Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gilt

$$\left| \frac{x}{\sqrt{|x|^2 + \epsilon}} - \frac{y}{\sqrt{|y|^2 + \epsilon}} \right| \leq \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} |x - y|, \quad (32)$$

$$\left| \frac{x}{(|x|^2 + \epsilon)^{\frac{3}{4}}} - \frac{y}{(|y|^2 + \epsilon)^{\frac{3}{4}}} \right| \leq \frac{c}{\epsilon^{\frac{3}{4}}} |x - y|, \quad (33)$$

$$\left| \sqrt{|x|^2 + \epsilon} - \sqrt{|y|^2 + \epsilon} \right| \leq |x - y|, \quad (34)$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{|x|^2 + \epsilon}} - \frac{1}{\sqrt{|y|^2 + \epsilon}} \right| \leq \frac{1}{\epsilon} |x - y| \quad (35)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$, wobei c unabhängig von x, y und ϵ ist.

Beweis: Sei $f_1(x) := \frac{x}{\sqrt{|x|^2 + \epsilon}}$, dann gilt nach Mittelwertsatz

$$|f_1(x) - f_1(y)| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df_1(x + t(y - x))\| |x - y|,$$

wobei $\|\cdot\|$ hier die Operatornorm bezeichnet. Es gilt aber $\|\cdot\| \leq c\|\cdot\|_\infty$ und wir schätzen ab:

$$|(f_1)_{x_i}^i(x)| = \frac{|x|^2 + \epsilon - x_i^2}{(|x|^2 + \epsilon)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{|x|^2 + \epsilon}} \leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$$

bzw. für $i \neq j$:

$$|(f_1)_{x_i}^j(x)| = \frac{|x_i x_j|}{(|x|^2 + \epsilon)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{x_i^2 + x_j^2}{(|x|^2 + \epsilon)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{|x|^2 + \epsilon}} \leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$$

Damit folgt die erste Ungleichung. Die zweite Ungleichung erhält man analog mit $f_2(x) := \frac{x}{(|x|^2 + \epsilon)^{\frac{3}{4}}}$ und

$$|(f_2)_{x_i}^i(x)| = \left| \frac{|x|^2 + \epsilon - \frac{3}{2}x_i^2}{(|x|^2 + \epsilon)^{\frac{7}{4}}} \right| \leq \frac{1}{(|x|^2 + \epsilon)^{\frac{3}{4}}} \leq \frac{1}{\epsilon^{\frac{3}{4}}}$$

bzw. für $i \neq j$:

$$|(f_2)_{x_i}^j(x)| = \frac{\frac{3}{2}|x_i x_j|}{(|x|^2 + \epsilon)^{\frac{7}{4}}} \leq \frac{x_i^2 + x_j^2}{(|x|^2 + \epsilon)^{\frac{7}{4}}} \leq \frac{1}{(|x|^2 + \epsilon)^{\frac{3}{4}}} \leq \frac{1}{\epsilon^{\frac{3}{4}}}$$

Zum Beweis der dritten Ungleichung betrachten wir die Funktion $f_3(t) := \sqrt{t^2 + \epsilon}$. Dann gilt

$$\left| \frac{d}{dt} f_3(t) \right| = \left| \frac{t}{\sqrt{t^2 + \epsilon}} \right| = \frac{|t|}{\sqrt{t^2 + \epsilon}} \leq 1.$$

Nach Mittelwertsatz folgt also

$$\left| \sqrt{|x|^2 + \epsilon} - \sqrt{|y|^2 + \epsilon} \right| = |f_3(|x|) - f_3(|y|)| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Analog betrachten wir zum Beweis der letzten Ungleichung die Funktion $f_4(t) := \frac{1}{\sqrt{t^2 + \epsilon}}$. Dann gilt

$$\left| \frac{d}{dt} f_4(t) \right| = \left| \frac{-t}{(t^2 + \epsilon)^{\frac{3}{2}}} \right| = \frac{|t|}{(t^2 + \epsilon)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{t^2 + \epsilon} \leq \frac{1}{\epsilon}.$$

Die Behauptung folgt also wieder mit Mittelwertsatz. \square

Außerdem benötigen wir noch eine inverse Abschätzung:

Proposition 23 Sei $f_h \in \mathcal{H}_h$ mit $\frac{h}{c} \leq h_i \leq h$, wobei $h_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$ für alle $i = 0, \dots, M-1$. Dann gilt:

$$|f_h|_{H_4^1(\partial B)} \leq \frac{\sqrt[4]{c}}{\sqrt[4]{h}} |f_h|_{H_2^1(\partial B)} \quad (36)$$

Beweis: Für $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$ gilt $f'_h(\varphi) = \frac{f(\varphi_{i+1}) - f(\varphi_i)}{h_i}$. Wegen $\frac{1}{h_i} \leq \frac{c}{h}$ erhalten wir also

$$\begin{aligned} |f_h|_{H_4^1(\partial B)}^4 &= \sum_{i=0}^{M-1} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{|f(\varphi_{i+1}) - f(\varphi_i)|^4}{h_i^4} = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{|f(\varphi_{i+1}) - f(\varphi_i)|^4}{h_i^3} \\ &\leq \frac{c}{h} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{|f(\varphi_{i+1}) - f(\varphi_i)|^4}{h_i^2} \leq \frac{c}{h} \left(\sum_{i=0}^{M-1} \frac{|f(\varphi_{i+1}) - f(\varphi_i)|^2}{h_i} \right)^2 \\ &= \frac{c}{h} \left(\sum_{i=0}^{M-1} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{|f(\varphi_{i+1}) - f(\varphi_i)|^2}{h_i^2} \right)^2 = \frac{c}{h} |f_h|_{H_2^1(\partial B)}^4. \end{aligned}$$

□

In der nächsten Proposition fassen wir die für uns wichtigen Resultate aus [8] zusammen. (Für die Definition von Sobolevräumen fraktionaler Ordnung siehe Kapitel 6.)

Proposition 24 *Sei $\gamma \in H_2^1(\partial B, \mathbb{R}^3)$, dann gilt*

$$|\Phi_h(I_h \gamma(\pi^{-1})) - \Phi(\gamma)|_{H_2^1(B_h)} \leq C\sqrt{h}|\gamma|_{H_2^1(\partial B)}, \quad (37)$$

$$|\Phi(\gamma)|_{H_2^1(B \setminus B_h)} \leq Ch|\gamma|_{H_2^1(\partial B)}, \quad (38)$$

$$\|\gamma - (\Phi(\gamma))(\pi)\|_{L_2(\partial B)} \leq Ch^2|\gamma|_{H_2^1(\partial B)}, \quad (39)$$

$$\left\| \frac{\partial(\Phi(\gamma))}{\partial \nu} \right\|_{L_2(\partial B_h)} \leq C|\gamma|_{H_2^1(\partial B)}. \quad (40)$$

Falls zusätzlich $\gamma \in H_2^{3/2}(\partial B, \mathbb{R}^3)$, gilt sogar

$$|\Phi_h(I_h \gamma(\pi^{-1})) - \Phi(\gamma)|_{H_2^1(B_h)} \leq Ch|\gamma|_{H_2^{3/2}(\partial B)} \quad (41)$$

und für $\xi_h \in \mathcal{H}_h$ gilt

$$|\Phi_h(\xi_h(\pi^{-1}))|_{H_2^1(B_h)} \leq C|\Phi(\xi_h)|_{H_2^1(B)}. \quad (42)$$

Dabei hängt in allen Fällen die Konstante C nicht von γ bzw. ξ_h ab.

Die erste und fünfte Abschätzung sind in Proposition 3.4. in [8] unter (64) zusammengefasst. (Beachte, dass im Gegensatz zu unserer Notation der Interpolationsoperator dort auf ∂B_h definiert ist.) Für Ungleichung zwei bis vier siehe Ungleichungen (71) bis (73) von Proposition 3.7. in [8]. Die sechste Abschätzung ist genau Corollar 3.5. in [8].

Zuletzt zeigen wir noch kurz eine einfache Aussage über Bilinearformen, die wir für die Fehlerabschätzung benötigen:

Proposition 25 *Sei $B(x, y)$ eine symmetrische Bilinearform auf einem Vektorraum V mit $|B(x, x)| \leq C|x|^2$ für alle $x \in V$. Dann gilt $|B(x, y)| \leq C|x||y|$ für alle $x, y \in V$.*

Beweis: Mit der Polarisationsformel gilt

$$\begin{aligned}
\frac{|B(x, y)|}{|x||y|} &= \left| B\left(\frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|}\right) \right| \\
&= \frac{1}{4} \left| B\left(\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|}, \frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|}\right) - B\left(\frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|}, \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|}\right) \right| \\
&\leq \frac{1}{4} \left(\left| B\left(\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|}, \frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|}\right) \right| + \left| B\left(\frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|}, \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|}\right) \right| \right) \\
&\leq \frac{C}{4} \left(\left| \frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} \right|^2 + \left| \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right|^2 \right) = C.
\end{aligned}$$

□

12 Konsistenz

In diesem Kapitel beweisen wir die Konsistenzabschätzungen für E_h^λ und dessen erster und zweiter Variation. Um die für die Fehlerabschätzung notwendigen Konvergenzordnungen zu erhalten, benötigen wir mindestens $\gamma \in H_2^2$. Dies ist für Minima auch der Fall, da für diese nach Kapitel 7 sogar $\gamma \in C^2$ gilt. Alle in den folgenden Propositionen auftretenden Normen von G existieren nach unseren Überlegungen in Kapitel 2.

Proposition 26 *Sei $\gamma \in \mathcal{C}^* \cap H_2^2(\partial B)$, $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ und h_0 so klein, dass $I_h\gamma \in \mathcal{C}_h \subset \mathcal{C}^*$ für alle $h \leq h_0$. Dann gilt*

$$|E_h^\lambda(I_h\gamma) - E_\lambda(\gamma)| \leq \lambda Ch \|\gamma\|_{H_2^1(\partial B)} \|\gamma\|_{H_2^2(\partial B)},$$

wobei $C = C(S, \mu, \lambda_0, G, \varrho, P)$.

Beweis: Nach Anwendung der Dreiecksungleichung auf die jeweils zusammengehörenden Terme von (18) und (25) können wir die einzelnen Ausdrücke abschätzen. Es gilt

$$\begin{aligned} D_h(\Phi_h(I_h\gamma(\pi^{-1}))) - D(\Phi(\gamma)) &= \frac{1}{2} \int_{B_h} |\nabla \Phi_h(I_h\gamma(\pi^{-1}))|^2 - \frac{1}{2} \int_B |\nabla \Phi(\gamma)|^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{B_h} |\nabla(\Phi_h(I_h\gamma(\pi^{-1})) - \Phi(\gamma))|^2 + \int_{B_h} \nabla \Phi(\gamma) \nabla(\Phi_h(I_h\gamma(\pi^{-1})) - \Phi(\gamma)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{B \setminus B_h} |\nabla \Phi(\gamma)|^2 = I_1 + I_2 - I_3. \end{aligned}$$

Mit (37) ergibt sich

$$I_1 = \frac{1}{2} \|\Phi_h(I_h\gamma(\pi^{-1})) - \Phi(\gamma)\|_{H_2^1(B_h)}^2 \leq Ch \|\gamma\|_{H_2^1(\partial B)}^2,$$

mit (14) und (41) erhalten wir

$$|I_2| \leq \|\Phi(\gamma)\|_{H_2^1(B_h)} \|\Phi_h(I_h\gamma(\pi^{-1})) - \Phi(\gamma)\|_{H_2^1(B_h)} \leq Ch \|\gamma\|_{H_2^{1/2}(\partial B)} \|\gamma\|_{H_2^{3/2}(\partial B)}$$

und mit (38) folgt

$$I_3 = \frac{1}{2} \|\Phi(\gamma)\|_{H_2^1(B \setminus B_h)}^2 \leq Ch^2 \|\gamma\|_{H_2^1(\partial B)}^2.$$

Für den zweiten Term gilt

$$\begin{aligned} &\left| \lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}}(G(I_h\gamma)^2) \sqrt{|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} - \lambda \int_{\partial B} G(\gamma)^2 \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| \\ &\leq \lambda \left| \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}}(G(I_h\gamma)^2) \left(\sqrt{|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} - \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right) \right| \\ &\quad + \lambda \left| \int_{\partial B} \left(I_{\frac{h}{2}}(G(I_h\gamma)^2) - G(I_h\gamma)^2 \right) \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| \\ &\quad + \lambda \left| \int_{\partial B} (G(I_h\gamma)^2 - G(\gamma)^2) \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| = I_4 + I_5 + I_6. \end{aligned}$$

Mit (30), (34) und (29) gilt

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq \lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \int_{\partial B} \left| \sqrt{|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} - \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| \\
&\leq \lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \|(I_h \gamma)' - \gamma'\|_{L_1(\partial B)} \leq \lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \sqrt{2\pi} |I_h \gamma - \gamma|_{H_2^1(\partial B)} \\
&\leq \lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \sqrt{2\pi} h |\gamma|_{H_2^2(\partial B)} \leq \lambda C h |\gamma|_{H_2^2(\partial B)}
\end{aligned}$$

und mit (28) und (31) folgt

$$\begin{aligned}
I_5 &\leq \lambda \int_{\partial B} \left| I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma)^2) - G(I_h \gamma)^2 \right| \left(|\gamma'| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \\
&\leq \lambda \left\| I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma)^2) - G(I_h \gamma)^2 \right\|_{L_2(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
&\leq \lambda \frac{h}{2} |G(I_h \gamma)^2|_{H_2^1(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
&\leq \lambda h \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} |I_h \gamma|_{H_2^1(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
&\leq \lambda C h |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + 1 \right),
\end{aligned}$$

wobei wir $\lambda \geq \lambda_0$ ausgenutzt haben. Wiederum mit (28) gilt

$$\begin{aligned}
I_6 &\leq \lambda \int_{\partial B} |G(I_h \gamma)^2 - G(\gamma)^2| \left(|\gamma'| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \\
&\leq \lambda \int_{\partial B} |G(I_h \gamma) + G(\gamma)| |G(I_h \gamma) - G(\gamma)| \left(|\gamma'| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \\
&\leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} |G|_{C^{0,1}(T_\mu)} \int_{\partial B} |I_h \gamma - \gamma| \left(|\gamma'| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \\
&\leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} |G|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|I_h \gamma - \gamma\|_{L_2(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
&\leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} |G|_{C^{0,1}(T_\mu)} h |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
&\leq \lambda C h |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + 1 \right),
\end{aligned}$$

wobei wir wieder $\lambda \geq \lambda_0$ angewandt haben. Für den vorletzten Term erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\lambda} \int_{\partial B} |(I_h \gamma)'|^2 - \frac{1}{\lambda} \int_{\partial B} |\gamma'|^2 \right| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\partial B} (|(I_h \gamma)'| + |\gamma'|) ||(I_h \gamma)'| - |\gamma'|| \\
&\leq \frac{1}{\lambda} \left(|I_h \gamma|_{H_2^1(\partial B)} + |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \right) |I_h \gamma - \gamma|_{H_2^1(\partial B)} \leq \frac{2}{\lambda} h |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} |\gamma|_{H_2^2(\partial B)},
\end{aligned}$$

wobei wir (29) und (31) ausgenutzt haben. Für den letzten Term folgt

$$\left| \frac{1}{\lambda} \int_{\partial B} I_h \varrho |I_h \gamma - P|^2 - \frac{1}{\lambda} \int_{\partial B} \varrho |\gamma - P|^2 \right|$$

$$\leq \left| \frac{1}{\lambda} \int_{\partial B} I_h \varrho (|I_h \gamma - P|^2 - |\gamma - P|^2) \right| + \left| \frac{1}{\lambda} \int_{\partial B} (I_h \varrho - \varrho) |\gamma - P|^2 \right| = I_7 + I_8.$$

Mit (30) und (28) gilt

$$\begin{aligned} I_7 &\leq \frac{1}{\lambda} \|\varrho\|_{C^0(\partial B)} \int_{\partial B} (|I_h \gamma - P| + |\gamma - P|) |I_h \gamma - P| - |\gamma - P| \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \|\varrho\|_{C^0(\partial B)} \left(\|I_h \gamma - P\|_{C^0(\partial B)} + \|\gamma - P\|_{C^0(\partial B)} \right) \sqrt{2\pi} \|I_h \gamma - \gamma\|_{L_2(\partial B)} \\ &\leq \frac{2}{\lambda} h \|\varrho\|_{C^0(\partial B)} \left(\|\gamma\|_{C^0(\partial B)} + |P| \right) \sqrt{2\pi} |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \\ &\leq \frac{C}{\lambda} h \left(\|\gamma\|_{C^0(\partial B)} + 1 \right) |\gamma|_{H_2^1(\partial B)}, \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} I_8 &\leq \frac{1}{\lambda} \sqrt{2\pi} \|I_h \varrho - \varrho\|_{L_2(\partial B)} \|\gamma - P\|_{C^0(\partial B)}^2 \\ &\leq \frac{1}{\lambda} h \sqrt{2\pi} |\varrho|_{H_2^1(\partial B)} \left(\|\gamma\|_{C^0(\partial B)} + |P| \right)^2 \leq \frac{C}{\lambda} h \left(\|\gamma\|_{C^0(\partial B)} + 1 \right)^2 \end{aligned}$$

unter erneuter Anwendung von (28). Da $\gamma(\partial B) \subset T_\mu$ und $\Pi \cap T_{2\mu} = \emptyset$ (siehe Kapitel 2), gilt $\sqrt{2\pi} \|\gamma\|_{H_2^1(\partial B)} \geq |\gamma|_{H_1^1(\partial B)} \geq 2\pi\mu$ und wir erhalten die Behauptung durch nochmalige Anwendung von $\lambda \geq \lambda_0$, der Einbettung $H_2^1(\partial B) \subset C^0(\partial B)$ sowie $\|\gamma\|_{H_2^{1/2}(\partial B)} \leq C \|\gamma\|_{H_2^1(\partial B)}$. \square

Proposition 27 Sei $\gamma \in \mathcal{C}^* \cap H_2^2(\partial B)$, $\xi_h \in \mathcal{H}_h$, $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ und h_0 so klein, dass $I_h \gamma \in \mathcal{C}_h \subset \mathcal{C}^*$ für alle $h \leq h_0$. Dann gilt

$$|\delta E_h^\lambda(I_h \gamma)(\xi_h) - \delta E_\lambda(\gamma)(\xi_h)| \leq \lambda^{\frac{3}{2}} C h \|\gamma\|_{H_2^1(\partial B)} \|\gamma\|_{H_2^2(\partial B)} \|\xi_h\|_{H_2^1(\partial B)},$$

wobei $C = C(S, \mu, \lambda_0, G, \varrho, P)$.

Beweis: Nach Anwendung der Dreiecksungleichung auf die jeweils zusammengehörenden Terme von (21) und (26) können wir die einzelnen Ausdrücke abschätzen. Es gilt

$$\begin{aligned} &\int_{B_h} \langle \nabla \Phi_h(I_h \gamma(\pi^{-1})), \nabla \Phi_h(\xi_h(\pi^{-1})) \rangle - \int_B \langle \nabla \Phi(\gamma), \nabla \Phi(\xi_h) \rangle \\ &= \int_{B_h} \langle \nabla (\Phi_h(I_h \gamma(\pi^{-1})) - \Phi(\gamma)), \nabla \Phi_h(\xi_h(\pi^{-1})) \rangle \\ &\quad + \int_{B_h} \langle \nabla \Phi(\gamma), \nabla (\Phi_h(\xi_h(\pi^{-1})) - \Phi(\xi_h)) \rangle - \int_{B \setminus B_h} \langle \nabla \Phi(\gamma), \nabla \Phi(\xi_h) \rangle \\ &= I_1 + I_2 - I_3. \end{aligned}$$

Mit (41), (42) und (14) ergibt sich

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq |\Phi_h(I_h \gamma(\pi^{-1})) - \Phi(\gamma)|_{H_2^1(B_h)} |\Phi_h(\xi_h(\pi^{-1}))|_{H_2^1(B_h)} \\ &\leq C h |\gamma|_{H_2^{3/2}(\partial B)} |\Phi(\xi_h)|_{H_2^1(B)} \leq C h |\gamma|_{H_2^{3/2}(\partial B)} \|\xi_h\|_{H_2^{1/2}(\partial B)}. \end{aligned}$$

Mit (40) und (39) sowie $\|f\|_{L_2(\partial B_h)} \leq \|f(\pi)\|_{L_2(\partial B)}$ für $f \in L_2(\partial B_h)$ erhalten wir

$$|I_2| = \left| \int_{\partial B_h} \frac{\partial(\Phi(\gamma))}{\partial \nu} (\Phi_h(\xi_h(\pi^{-1})) - \Phi(\xi_h)) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\| \frac{\partial(\Phi(\gamma))}{\partial\nu} \right\|_{L_2(\partial B_h)} \left\| \Phi_h(\xi_h(\pi^{-1})) - \Phi(\xi_h) \right\|_{L_2(\partial B_h)} \\
&\leq C \|\Phi(\gamma)\|_{H_2^1(\partial B)} \|\xi_h - (\Phi(\xi_h))(\pi)\|_{L_2(\partial B)} \leq Ch^2 |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}
\end{aligned}$$

und mit (38) folgt

$$|I_3| \leq |\Phi(\gamma)|_{H_2^1(B \setminus B_h)} |\Phi(\xi_h)|_{H_2^1(B \setminus B_h)} \leq Ch^2 |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}.$$

Für den zweiten Term gilt

$$\begin{aligned}
&\left| 2\lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}}(G(I_h\gamma) \langle \nabla G(I_h\gamma), \xi_h \rangle) \sqrt{|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right. \\
&\quad \left. - 2\lambda \int_{\partial B} G(\gamma) \langle \nabla G(\gamma), \xi_h \rangle \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| \\
&\leq \left| 2\lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}}(G(I_h\gamma) \langle \nabla G(I_h\gamma), \xi_h \rangle) \left(\sqrt{|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} - \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right) \right| \\
&\quad + \left| 2\lambda \int_{\partial B} \left(I_{\frac{h}{2}}(G(I_h\gamma) \langle \nabla G(I_h\gamma), \xi_h \rangle) - G(I_h\gamma) \langle \nabla G(I_h\gamma), \xi_h \rangle \right) \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| \\
&\quad + \left| 2\lambda \int_{\partial B} G(I_h\gamma) (\langle \nabla G(I_h\gamma), \xi_h \rangle - \langle \nabla G(\gamma), \xi_h \rangle) \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| \\
&\quad + \left| 2\lambda \int_{\partial B} (G(I_h\gamma) - G(\gamma)) \langle \nabla G(\gamma), \xi_h \rangle \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| = I_4 + I_5 + I_6 + I_7.
\end{aligned}$$

Mit (30), (34) und (29) gilt

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \int_{\partial B} \left| \sqrt{|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} - \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| \\
&\leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \|(I_h\gamma)' - \gamma'\|_{L_1(\partial B)} \\
&\leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \sqrt{2\pi} |I_h\gamma - \gamma|_{H_2^1(\partial B)} \\
&\leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \sqrt{2\pi} h |\gamma|_{H_2^2(\partial B)} \\
&\leq \lambda Ch \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} |\gamma|_{H_2^2(\partial B)}.
\end{aligned}$$

Mit (28) und (31) folgt

$$\begin{aligned}
I_5 &\leq 2\lambda \int_{\partial B} \left| I_{\frac{h}{2}}(G(I_h\gamma) \langle \nabla G(I_h\gamma), \xi_h \rangle) - G(I_h\gamma) \langle \nabla G(I_h\gamma), \xi_h \rangle \right| \left(|\gamma'| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \\
&\leq 2\lambda \left\| I_{\frac{h}{2}}(G(I_h\gamma) \langle \nabla G(I_h\gamma), \xi_h \rangle) - G(I_h\gamma) \langle \nabla G(I_h\gamma), \xi_h \rangle \right\|_{L_2(\partial B)} \\
&\quad \cdot \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
&\leq \lambda h |G(I_h\gamma) \langle \nabla G(I_h\gamma), \xi_h \rangle|_{H_2^1(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
&\leq \lambda h \left(\|G(I_h\gamma) \langle \nabla G(I_h\gamma), \xi_h' \rangle\|_{L_2(\partial B)} + \|G(I_h\gamma) \langle (I_h\gamma)', \nabla^2 G(I_h\gamma) \xi_h \rangle\|_{L_2(\partial B)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|\langle \nabla G(I_h \gamma), (I_h \gamma)' \rangle \langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h \rangle\|_{L_2(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
& \leq \lambda h \left(\|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h'\|_{L_2(\partial B)} \right. \\
& \quad + \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|(I_h \gamma)'\|_{L_2(\partial B)} \|\nabla^2 G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \\
& \quad \left. + \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \|(I_h \gamma)'\|_{L_2(\partial B)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \right) \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
& \leq \lambda C h \left(|\xi_h|_{H_2^1(\partial B)} + |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \right) \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + 1 \right),
\end{aligned}$$

wobei wir $\lambda \geq \lambda_0$ angewandt haben. (Die C^0 -Norm einer matrixwertigen Funktion $f: T_\mu \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ist hier immer als $\sup_{x \in T_\mu} \|f(x)\|_2$ zu verstehen, wobei $\|\cdot\|_2$ die Frobenius-Norm bezeichnet.) Schließlich gilt

$$\begin{aligned}
I_6 & \leq 2\lambda \int_{\partial B} |G(I_h \gamma) \langle \nabla G(I_h \gamma) - \nabla G(\gamma), \xi_h \rangle| \left(|\gamma'| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \\
& \leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \int_{\partial B} |I_h \gamma - \gamma| \left(|\gamma'| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \\
& \leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \|I_h \gamma - \gamma\|_{L_2(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
& \leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} h |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
& \leq \lambda C h \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + 1 \right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
I_7 & \leq 2\lambda \int_{\partial B} |(G(I_h \gamma) - G(\gamma)) \langle \nabla G(\gamma), \xi_h \rangle| \left(|\gamma'| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \\
& \leq 2\lambda \|G\|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \int_{\partial B} |I_h \gamma - \gamma| \left(|\gamma'| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \\
& \leq 2\lambda \|G\|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \|I_h \gamma - \gamma\|_{L_2(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
& \leq 2\lambda \|G\|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} h |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
& \leq \lambda C h \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + 1 \right),
\end{aligned}$$

wobei wir jeweils wieder (28) und $\lambda \geq \lambda_0$ angewandt haben. Für den dritten Term berechnen wir:

$$\begin{aligned}
& \left| \lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma)^2) \frac{\langle (I_h \gamma)', \xi_h' \rangle}{\sqrt{|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} - \lambda \int_{\partial B} G(\gamma)^2 \frac{\langle \gamma', \xi_h' \rangle}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right| \\
& \leq \left| \lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma)^2) \left(\frac{\langle (I_h \gamma)', \xi_h' \rangle}{\sqrt{|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} - \frac{\langle \gamma', \xi_h' \rangle}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right) \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \lambda \int_{\partial B} \left(I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma)^2) - G(I_h \gamma)^2 \right) \frac{\langle \gamma', \xi'_h \rangle}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right| \\
& + \left| \lambda \int_{\partial B} (G(I_h \gamma)^2 - G(\gamma)^2) \frac{\langle \gamma', \xi'_h \rangle}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right| = I_8 + I_9 + I_{10}
\end{aligned}$$

Mit (30), (32) und (29) gilt

$$\begin{aligned}
I_8 & \leq \lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \int_{\partial B} \left| \frac{(I_h \gamma)'}{\sqrt{|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} - \frac{\gamma'}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right| |\xi'_h| \\
& \leq \lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \int_{\partial B} c\sqrt{\lambda} |(I_h \gamma)' - \gamma'| |\xi'_h| \\
& \leq \lambda^{\frac{3}{2}} c \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 |I_h \gamma - \gamma|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)} \\
& \leq \lambda^{\frac{3}{2}} c \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 h |\gamma|_{H_2^2(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)} \\
& \leq \lambda^{\frac{3}{2}} C h |\gamma|_{H_2^2(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}.
\end{aligned}$$

Weiter folgt mit (28) und (31)

$$\begin{aligned}
I_9 & \leq \lambda \int_{\partial B} \left| I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma)^2) - G(I_h \gamma)^2 \right| \frac{|\gamma'| |\xi'_h|}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \\
& \leq \lambda \int_{\partial B} \left| I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma)^2) - G(I_h \gamma)^2 \right| |\xi'_h| \\
& \leq \lambda \left\| I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma)^2) - G(I_h \gamma)^2 \right\|_{L_2(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)} \\
& \leq \lambda \frac{h}{2} |G(I_h \gamma)^2|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)} \\
& \leq \lambda h \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} |I_h \gamma|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)} \\
& \leq \lambda C h |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}.
\end{aligned}$$

Wiederum mit (28) erhalten wir

$$\begin{aligned}
I_{10} & \leq \lambda \int_{\partial B} |G(I_h \gamma) + G(\gamma)| |G(I_h \gamma) - G(\gamma)| \frac{|\gamma'| |\xi'_h|}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \\
& \leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} |G|_{C^{0,1}(T_\mu)} \int_{\partial B} |I_h \gamma - \gamma| |\xi'_h| \\
& \leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} |G|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|I_h \gamma - \gamma\|_{L_2(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)} \\
& \leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} |G|_{C^{0,1}(T_\mu)} h |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)} \\
& \leq \lambda C h |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}.
\end{aligned}$$

Für den vorletzten Term erhalten wir mit (29)

$$\left| \frac{2}{\lambda} \int_{\partial B} \langle (I_h \gamma)', \xi'_h \rangle - \frac{2}{\lambda} \int_{\partial B} \langle \gamma', \xi'_h \rangle \right| \leq \frac{2}{\lambda} \int_{\partial B} |(I_h \gamma)' - \gamma'| |\xi'_h|$$

$$\leq \frac{2}{\lambda} |I_h \gamma - \gamma|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)} \leq \frac{2}{\lambda} h |\gamma|_{H_2^2(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}.$$

Für den letzten Term gilt

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2}{\lambda} \int_{\partial B} I_h \varrho \langle I_h \gamma - P, \xi_h \rangle - \frac{2}{\lambda} \int_{\partial B} \varrho \langle \gamma - P, \xi_h \rangle \right| \\ & \leq \left| \frac{2}{\lambda} \int_{\partial B} I_h \varrho \langle I_h \gamma - \gamma, \xi_h \rangle \right| + \left| \frac{2}{\lambda} \int_{\partial B} (I_h \varrho - \varrho) \langle \gamma - P, \xi_h \rangle \right| \\ & \leq \frac{2}{\lambda} \|\varrho\|_{C^0(\partial B)} \|I_h \gamma - \gamma\|_{L_2(\partial B)} \|\xi_h\|_{L_2(\partial B)} \\ & \quad + \frac{2}{\lambda} \|I_h \varrho - \varrho\|_{L_2(\partial B)} \|\gamma - P\|_{C^0(\partial B)} \|\xi_h\|_{L_2(\partial B)} \\ & \leq \frac{2}{\lambda} h \|\varrho\|_{C^0(\partial B)} |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \|\xi_h\|_{L_2(\partial B)} + \frac{2}{\lambda} h |\varrho|_{H_2^1(\partial B)} \left(\|\gamma\|_{C^0(\partial B)} + |P| \right) \|\xi_h\|_{L_2(\partial B)} \\ & \leq \frac{C}{\lambda} h \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \|\gamma\|_{C^0(\partial B)} + 1 \right) \|\xi_h\|_{L_2(\partial B)} \end{aligned}$$

mit (30) und (28). Insgesamt erhalten wir also wegen $\|\gamma\|_{H_2^1(\partial B)} \geq \sqrt{2\pi}\mu$, $\|\gamma\|_{H_2^{1/2}(\partial B)} \leq C\|\gamma\|_{H_2^1(\partial B)}$, der Einbettung $H_2^1(\partial B) \subset C^0(\partial B)$ und $\lambda \geq \lambda_0$ die Behauptung. \square

Proposition 28 *Sei $\gamma \in C^* \cap H_2^2(\partial B)$, $\xi_h \in \mathcal{H}_h$, $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ und h_0 so klein, dass $I_h \gamma \in \mathcal{C}_h \subset C^*$ für alle $h \leq h_0$. Dann gilt*

$$|\delta^2 E_h^\lambda(I_h \gamma)(\xi_h, \xi_h) - \delta^2 E_\lambda(\gamma)(\xi_h, \xi_h)| \leq \lambda^2 C \sqrt{h} \|\gamma\|_{H_2^1(\partial B)} \|\gamma\|_{H_2^2(\partial B)} \|\xi_h\|_{H_2^1(\partial B)}^2,$$

wobei $C = C(S, \mu, \lambda_0, G, \varrho, P)$.

Beweis: Nach Anwendung der Dreiecksungleichung auf die jeweils zusammengehörenden Terme von (22) und (27) können wir die einzelnen Ausdrücke abschätzen. Der erste Term kann analog zum Beweis von Proposition 26 zerlegt werden:

$$\begin{aligned} & \int_{B_h} |\nabla \Phi_h(\xi_h(\pi^{-1}))|^2 - \int_B |\nabla \Phi(\xi_h)|^2 = \int_{B_h} |\nabla (\Phi_h(\xi_h(\pi^{-1})) - \Phi(\xi_h))|^2 \\ & + 2 \int_{B_h} \nabla \Phi(\xi_h) \nabla (\Phi_h(\xi_h(\pi^{-1})) - \Phi(\xi_h)) - \int_{B \setminus B_h} |\nabla \Phi(\xi_h)|^2 = I_1 + I_2 - I_3 \end{aligned}$$

Dann gilt mit (37)

$$I_1 = |\Phi_h(\xi_h(\pi^{-1})) - \Phi(\xi_h)|_{H_2^1(B_h)}^2 \leq Ch |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}^2,$$

mit (14) und (37) folgt

$$|I_2| \leq 2 |\Phi(\xi_h)|_{H_2^1(B_h)} |\Phi_h(\xi_h(\pi^{-1})) - \Phi(\xi_h)|_{H_2^1(B_h)} \leq C \sqrt{h} \|\xi_h\|_{H_2^{1/2}(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}$$

und mit (38) erhalten wir

$$I_3 = |\Phi(\xi_h)|_{H_2^1(B \setminus B_h)}^2 \leq Ch^2 |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}^2.$$

Für den zweiten Term gilt

$$\begin{aligned}
& \left| 2\lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (\langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h \rangle^2) \sqrt{|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right. \\
& \quad \left. - 2\lambda \int_{\partial B} \langle \nabla G(\gamma), \xi_h \rangle^2 \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| \\
& \leq \left| 2\lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (\langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h \rangle^2) \left(\sqrt{|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} - \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right) \right| \\
& \quad + \left| 2\lambda \int_{\partial B} \left(I_{\frac{h}{2}} (\langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h \rangle^2) - \langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h \rangle^2 \right) \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| \\
& \quad + \left| 2\lambda \int_{\partial B} (\langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h \rangle^2 - \langle \nabla G(\gamma), \xi_h \rangle^2) \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| = I_4 + I_5 + I_6.
\end{aligned}$$

Mit (30), (34) und (29) erhalten wir

$$\begin{aligned}
I_4 & \leq 2\lambda \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \int_{\partial B} \left| \sqrt{|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} - \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| \\
& \leq 2\lambda \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \|(I_h \gamma)' - \gamma'\|_{L_1(\partial B)} \\
& \leq 2\lambda \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \sqrt{2\pi} h |\gamma|_{H_2^2(\partial B)} \\
& \leq \lambda C \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 h |\gamma|_{H_2^2(\partial B)}.
\end{aligned}$$

Mit (28) und (31) folgt

$$\begin{aligned}
I_5 & \leq 2\lambda \int_{\partial B} \left| I_{\frac{h}{2}} (\langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h \rangle^2) - \langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h \rangle^2 \right| \left(|\gamma'| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \\
& \leq 2\lambda \left\| I_{\frac{h}{2}} (\langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h \rangle^2) - \langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h \rangle^2 \right\|_{L_2(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
& \leq \lambda h |\langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h \rangle^2|_{H_2^1(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
& \leq 2\lambda h \left\| \langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h \rangle (\langle (I_h \gamma)', \nabla^2 G(I_h \gamma) \xi_h \rangle + \langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h' \rangle) \right\|_{L_2(\partial B)} \\
& \quad \cdot \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
& \leq 2\lambda h \left(|I_h \gamma|_{H_2^1(\partial B)} \|\nabla^2 G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} + \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)} \right) \\
& \quad \cdot \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
& \leq \lambda C h \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} + |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)} \right) \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + 1 \right),
\end{aligned}$$

wobei wir wieder $\lambda \geq \lambda_0$ benutzt haben. Weiter gilt

$$I_6 \leq 2\lambda \int_{\partial B} |\langle \nabla G(I_h \gamma) + \nabla G(\gamma), \xi_h \rangle| |\langle \nabla G(I_h \gamma) - \nabla G(\gamma), \xi_h \rangle| \left(|\gamma'| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq 4\lambda \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \int_{\partial B} |\xi_h|^2 |\nabla G(I_h \gamma) - \nabla G(\gamma)| \left(|\gamma'| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \\
&\leq 4\lambda \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \int_{\partial B} |I_h \gamma - \gamma| \left(|\gamma'| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \\
&\leq 4\lambda \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \|I_h \gamma - \gamma\|_{L_2(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
&\leq 4\lambda \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 h |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
&\leq \lambda C \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 h |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + 1 \right),
\end{aligned}$$

wobei wir wieder (28) und $\lambda \geq \lambda_0$ verwendet haben. Der dritte Term ergibt

$$\begin{aligned}
&\left| 2\lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma) \langle \xi_h, \nabla^2 G(I_h \gamma) \xi_h \rangle) \sqrt{|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right. \\
&\quad \left. - 2\lambda \int_{\partial B} G(\gamma) \langle \xi_h, \nabla^2 G(\gamma) \xi_h \rangle \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| \\
&\leq \left| 2\lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma) \langle \xi_h, \nabla^2 G(I_h \gamma) \xi_h \rangle) \left(\sqrt{|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} - \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right) \right| \\
&\quad + \left| 2\lambda \int_{\partial B} \left(I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma) \langle \xi_h, \nabla^2 G(I_h \gamma) \xi_h \rangle) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - G(I_h \gamma) \langle \xi_h, \nabla^2 G(I_h \gamma) \xi_h \rangle \right) \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| \\
&\quad + \left| 2\lambda \int_{\partial B} G(I_h \gamma) (\langle \xi_h, \nabla^2 G(I_h \gamma) \xi_h \rangle - \langle \xi_h, \nabla^2 G(\gamma) \xi_h \rangle) \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| \\
&\quad + \left| 2\lambda \int_{\partial B} (G(I_h \gamma) - G(\gamma)) \langle \xi_h, \nabla^2 G(\gamma) \xi_h \rangle \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| = I_7 + I_8 + I_9 + I_{10}.
\end{aligned}$$

Mit (30), (34) und (29) erhalten wir wieder

$$\begin{aligned}
I_7 &\leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \|\nabla^2 G\|_{C^0(T_\mu)} \int_{\partial B} \left| \sqrt{|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} - \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| \\
&\leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \|\nabla^2 G\|_{C^0(T_\mu)} \|(I_h \gamma)' - \gamma'\|_{L_1(\partial B)} \\
&\leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \|\nabla^2 G\|_{C^0(T_\mu)} \sqrt{2\pi} h |\gamma|_{H_2^2(\partial B)} \\
&\leq \lambda C \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 h |\gamma|_{H_2^2(\partial B)}.
\end{aligned}$$

Mit (28) und (31) folgt

$$\begin{aligned}
I_8 &\leq 2\lambda \int_{\partial B} \left| I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma) \langle \xi_h, \nabla^2 G(I_h \gamma) \xi_h \rangle) - G(I_h \gamma) \langle \xi_h, \nabla^2 G(I_h \gamma) \xi_h \rangle \right| \\
&\quad \cdot \left(|\gamma'| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\lambda \left\| I_{\frac{h}{2}} \left(G(I_h \gamma) \langle \xi_h, \nabla^2 G(I_h \gamma) \xi_h \rangle \right) - G(I_h \gamma) \langle \xi_h, \nabla^2 G(I_h \gamma) \xi_h \rangle \right\|_{L_2(\partial B)} \\
&\quad \cdot \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
&\leq \lambda h \left| G(I_h \gamma) \langle \xi_h, \nabla^2 G(I_h \gamma) \xi_h \rangle \right|_{H_2^1(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
&\leq \lambda h \left(\left\| G(I_h \gamma) \sum_{i=1}^3 \langle (I_h \gamma)', \nabla^2 G_{x_i}(I_h \gamma) \xi_h \rangle \xi_h^i \right\|_{L_2(\partial B)} \right. \\
&\quad + 2 \left\| G(I_h \gamma) \langle \xi_h', \nabla^2 G(I_h \gamma) \xi_h \rangle \right\|_{L_2(\partial B)} \\
&\quad \left. + \left\| \langle \nabla G(I_h \gamma), (I_h \gamma)' \rangle \langle \xi_h, \nabla^2 G(I_h \gamma) \xi_h \rangle \right\|_{L_2(\partial B)} \right) \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
&\leq \lambda h \left(\|G\|_{C^0(T_\mu)} \|(I_h \gamma)'\|_{L_2(\partial B)} \|\nabla^3 G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \right. \\
&\quad + 2 \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h'\|_{L_2(\partial B)} \|\nabla^2 G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \\
&\quad \left. + \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \|(I_h \gamma)'\|_{L_2(\partial B)} \|\nabla^2 G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \right) \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
&\leq \lambda C h \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 + |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \right) \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + 1 \right),
\end{aligned}$$

wobei wir wieder $\lambda \geq \lambda_0$ angewandt haben. (Die C^0 -Norm der 3-tensorwertigen Funktion $f = \nabla^3 G: T_\mu \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ist hier als $\sup_{x \in T_\mu} \sqrt{\sum_{i,j,k=1}^3 f_{ijk}^2(x)}$ zu verstehen.) Weiter gilt

$$\begin{aligned}
I_9 &\leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} \int_{\partial B} |\xi_h|^2 \|\nabla^2 G(I_h \gamma) - \nabla^2 G(\gamma)\|_2 \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \\
&\leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \|\nabla^2 G\|_{C^{0,1}(T_\mu)} \int_{\partial B} |I_h \gamma - \gamma| \left(|\gamma'| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \\
&\leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \|\nabla^2 G\|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|I_h \gamma - \gamma\|_{L_2(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
&\leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \|\nabla^2 G\|_{C^{0,1}(T_\mu)} h |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
&\leq \lambda C \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 h |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + 1 \right),
\end{aligned}$$

wobei $\|\cdot\|_2$ wieder die Frobenius-Norm bezeichnet, (Die $C^{0,1}$ -Halbnorm einer matrixwertigen Funktion $f: T_\mu \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ist hier immer als $\sup_{x,y \in T_\mu} \frac{\|f(x) - f(y)\|_2}{|x-y|}$ zu verstehen.) und

$$\begin{aligned}
I_{10} &\leq 2\lambda \|G\|_{C^{0,1}(T_\mu)} \int_{\partial B} |I_h \gamma - \gamma| |\xi_h|^2 \|\nabla^2 G(\gamma)\|_2 \sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \\
&\leq 2\lambda \|G\|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \|\nabla^2 G\|_{C^0(T_\mu)} \int_{\partial B} |I_h \gamma - \gamma| \left(|\gamma'| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\lambda \|G\|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \|\nabla^2 G\|_{C^0(T_\mu)} \|I_h \gamma - \gamma\|_{L_2(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
&\leq 2\lambda \|G\|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \|\nabla^2 G\|_{C^0(T_\mu)} h |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
&\leq \lambda C \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 h |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + 1 \right),
\end{aligned}$$

wobei wir jeweils (28) und $\lambda \geq \lambda_0$ angewandt haben. Für den vierten und fünften Term erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\left| 4\lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma) \langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h \rangle) \frac{\langle (I_h \gamma)', \xi_h' \rangle}{\sqrt{|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right. \\
&\quad \left. - 4\lambda \int_{\partial B} G(\gamma) \langle \nabla G(\gamma), \xi_h \rangle \frac{\langle \gamma', \xi_h' \rangle}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right| \\
&\leq \left| 4\lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma) \langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h \rangle) \left(\frac{\langle (I_h \gamma)', \xi_h' \rangle}{\sqrt{|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} - \frac{\langle \gamma', \xi_h' \rangle}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right) \right| \\
&\quad + \left| 4\lambda \int_{\partial B} \left(I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma) \langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h \rangle) - G(I_h \gamma) \langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h \rangle \right) \frac{\langle \gamma', \xi_h' \rangle}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right| \\
&\quad + \left| 4\lambda \int_{\partial B} G(I_h \gamma) (\langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h \rangle - \langle \nabla G(\gamma), \xi_h \rangle) \frac{\langle \gamma', \xi_h' \rangle}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right| \\
&\quad + \left| 4\lambda \int_{\partial B} (G(I_h \gamma) - G(\gamma)) \langle \nabla G(\gamma), \xi_h \rangle \frac{\langle \gamma', \xi_h' \rangle}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right| = I_{11} + I_{12} + I_{13} + I_{14}
\end{aligned}$$

Mit (30), (32) und (29) gilt

$$\begin{aligned}
I_{11} &\leq 4\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \\
&\quad \cdot \int_{\partial B} \left| \frac{(I_h \gamma)'}{\sqrt{|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} - \frac{\gamma'}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right| |\xi_h'| \\
&\leq 4\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \int_{\partial B} c\sqrt{\lambda} |(I_h \gamma)' - \gamma'| |\xi_h'| \\
&\leq 4\lambda^{\frac{3}{2}} c \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} |I_h \gamma - \gamma|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)} \\
&\leq 4\lambda^{\frac{3}{2}} c \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} h |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)} \\
&\leq \lambda^{\frac{3}{2}} C \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} h |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}.
\end{aligned}$$

Mit (28) und (31) erhalten wir

$$\begin{aligned}
I_{12} &\leq 4\lambda \int_{\partial B} \left| I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma) \langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h \rangle) - G(I_h \gamma) \langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h \rangle \right| |\xi_h'| \\
&\leq 4\lambda \left\| I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma) \langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h \rangle) - G(I_h \gamma) \langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h \rangle \right\|_{L_2(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\lambda h |G(I_h \gamma) \langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h \rangle|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)} \\
&\leq 2\lambda h \left(\|G(I_h \gamma) \langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h' \rangle\|_{L_2(\partial B)} + \|G(I_h \gamma) \langle (I_h \gamma)', \nabla^2 G(I_h \gamma) \xi_h \rangle\|_{L_2(\partial B)} \right. \\
&\quad \left. + \|\langle \nabla G(I_h \gamma), (I_h \gamma)' \rangle \langle \nabla G(I_h \gamma), \xi_h \rangle\|_{L_2(\partial B)} \right) |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)} \\
&\leq 2\lambda h \left(\|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h'\|_{L_2(\partial B)} \right. \\
&\quad + \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|(I_h \gamma)'\|_{L_2(\partial B)} \|\nabla^2 G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \\
&\quad \left. + \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \|(I_h \gamma)'\|_{L_2(\partial B)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \right) |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)} \\
&\leq \lambda Ch \left(|\xi_h|_{H_2^1(\partial B)} + |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \right) |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}.
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
I_{13} &\leq 4\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} |\nabla G|_{C^{0,1}(T_\mu)} \int_{\partial B} |I_h \gamma - \gamma| |\xi_h| \frac{|\gamma'| |\xi_h'|}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \\
&\leq 4\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} |\nabla G|_{C^{0,1}(T_\mu)} \int_{\partial B} |I_h \gamma - \gamma| |\xi_h| |\xi_h'| \\
&\leq 4\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} |\nabla G|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|I_h \gamma - \gamma\|_{L_2(\partial B)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)} \\
&\leq 4\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} |\nabla G|_{C^{0,1}(T_\mu)} h |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)} \\
&\leq \lambda Ch |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
I_{14} &\leq 4\lambda |G|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \int_{\partial B} |I_h \gamma - \gamma| |\xi_h| \frac{|\gamma'| |\xi_h'|}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \\
&\leq 4\lambda |G|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \int_{\partial B} |I_h \gamma - \gamma| |\xi_h| |\xi_h'| \\
&\leq 4\lambda |G|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \|I_h \gamma - \gamma\|_{L_2(\partial B)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)} \\
&\leq 4\lambda |G|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} h |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)} \\
&\leq \lambda Ch |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)},
\end{aligned}$$

wobei wir jeweils wieder (28) benutzt haben. Für den sechsten Term erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left| \lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma)^2) \frac{|\xi_h'|^2}{\sqrt{|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} - \lambda \int_{\partial B} G(\gamma)^2 \frac{|\xi_h'|^2}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right| \\
&\leq \left| \lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma)^2) |\xi_h'|^2 \left(\frac{1}{\sqrt{|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} - \frac{1}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right) \right| \\
&\quad + \left| \lambda \int_{\partial B} \left(I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma)^2) - G(I_h \gamma)^2 \right) |\xi_h'|^2 \frac{1}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right| \\
&\quad + \left| \lambda \int_{\partial B} (G(I_h \gamma)^2 - G(\gamma)^2) |\xi_h'|^2 \frac{1}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right| = I_{15} + I_{16} + I_{17}.
\end{aligned}$$

Mit (30), (35), (29) und (36) gilt

$$\begin{aligned}
I_{15} &\leq \lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \int_{\partial B} |\xi'_h|^2 \left| \frac{1}{\sqrt{|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} - \frac{1}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right| \\
&\leq \lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \int_{\partial B} |\xi'_h|^2 \lambda |(I_h\gamma)' - \gamma'| \\
&\leq \lambda^2 \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 |\xi_h|_{H_4^1(\partial B)}^2 |I_h\gamma - \gamma|_{H_2^1(\partial B)} \\
&\leq \lambda^2 \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 |\xi_h|_{H_4^1(\partial B)}^2 h |\gamma|_{H_2^2(\partial B)} \\
&\leq \lambda^2 C |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}^2 \sqrt{h} |\gamma|_{H_2^2(\partial B)}.
\end{aligned}$$

Mit (28), (31) und (36) folgt

$$\begin{aligned}
I_{16} &\leq \lambda \int_{\partial B} \left| I_{\frac{h}{2}} (G(I_h\gamma)^2) - G(I_h\gamma)^2 \right| |\xi'_h|^2 \sqrt{\lambda} \\
&\leq \lambda^{\frac{3}{2}} \left\| I_{\frac{h}{2}} (G(I_h\gamma)^2) - G(I_h\gamma)^2 \right\|_{L_2(\partial B)} |\xi_h|_{H_4^1(\partial B)}^2 \\
&\leq \lambda^{\frac{3}{2}} \frac{h}{2} |G(I_h\gamma)^2|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_4^1(\partial B)}^2 \\
&\leq \lambda^{\frac{3}{2}} h \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} |I_h\gamma|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_4^1(\partial B)}^2 \\
&\leq \lambda^{\frac{3}{2}} C \sqrt{h} |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}^2.
\end{aligned}$$

Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned}
I_{17} &\leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} |G|_{C^{0,1}(T_\mu)} \int_{\partial B} |I_h\gamma - \gamma| |\xi'_h|^2 \frac{1}{\sqrt{|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \\
&\leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} |G|_{C^{0,1}(T_\mu)} \int_{\partial B} |I_h\gamma - \gamma| |\xi'_h|^2 \sqrt{\lambda} \\
&\leq 2\lambda^{\frac{3}{2}} \|G\|_{C^0(T_\mu)} |G|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|I_h\gamma - \gamma\|_{L_2(\partial B)} |\xi_h|_{H_4^1(\partial B)}^2 \\
&\leq 2\lambda^{\frac{3}{2}} \|G\|_{C^0(T_\mu)} |G|_{C^{0,1}(T_\mu)} h |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_4^1(\partial B)}^2 \\
&\leq \lambda^{\frac{3}{2}} C \sqrt{h} |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}^2,
\end{aligned}$$

unter Verwendung von (28) und (36). Für den siebten Term gilt

$$\begin{aligned}
&\left| \lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (G(I_h\gamma)^2) \frac{\langle (I_h\gamma)', \xi'_h \rangle^2}{(|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{2}}} - \lambda \int_{\partial B} G(\gamma)^2 \frac{\langle \gamma', \xi'_h \rangle^2}{(|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{2}}} \right| \\
&\leq \left| \lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (G(I_h\gamma)^2) \left(\frac{\langle (I_h\gamma)', \xi'_h \rangle^2}{(|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{2}}} - \frac{\langle \gamma', \xi'_h \rangle^2}{(|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{2}}} \right) \right| \\
&\quad + \left| \lambda \int_{\partial B} \left(I_{\frac{h}{2}} (G(I_h\gamma)^2) - G(I_h\gamma)^2 \right) \frac{\langle \gamma', \xi'_h \rangle^2}{(|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{2}}} \right| \\
&\quad + \left| \lambda \int_{\partial B} (G(I_h\gamma)^2 - G(\gamma)^2) \frac{\langle \gamma', \xi'_h \rangle^2}{(|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{2}}} \right| = I_{18} + I_{19} + I_{20}.
\end{aligned}$$

Mit (30), (33), (29) und (36) sowie $\frac{a}{(a^2+\epsilon)^{\frac{3}{4}}} \leq \frac{1}{(a^2+\epsilon)^{\frac{1}{4}}} \leq \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{4}}}$ für alle $a \geq 0, \epsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
I_{18} &\leq \lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \int_{\partial B} \left| \left\langle \frac{(I_h \gamma)'}{(|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{4}}} + \frac{\gamma'}{(|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{4}}}, \xi'_h \right\rangle \right. \\
&\quad \cdot \left. \left\langle \frac{(I_h \gamma)'}{(|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{4}}} - \frac{\gamma'}{(|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{4}}}, \xi'_h \right\rangle \right| \\
&\leq \lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \int_{\partial B} 2\sqrt{\lambda} |\xi'_h|^2 \left| \frac{(I_h \gamma)'}{(|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{4}}} - \frac{\gamma'}{(|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{4}}} \right| \\
&\leq 2\lambda^{\frac{5}{4}} \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \int_{\partial B} |\xi'_h|^2 c\lambda^{\frac{3}{4}} |(I_h \gamma)' - \gamma'| \\
&\leq 2\lambda^2 c \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 |\xi_h|_{H_4^1(\partial B)}^2 |I_h \gamma - \gamma|_{H_2^1(\partial B)} \\
&\leq 2\lambda^2 c \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 |\xi_h|_{H_4^1(\partial B)}^2 h |\gamma|_{H_2^2(\partial B)} \\
&\leq \lambda^2 C |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}^2 \sqrt{h} |\gamma|_{H_2^2(\partial B)}.
\end{aligned}$$

Mit (28), (31) und (36) sowie $\frac{a^2}{(a^2+\epsilon)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{(a^2+\epsilon)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{2}}}$ für alle $a \geq 0, \epsilon > 0$ folgt

$$\begin{aligned}
I_{19} &\leq \lambda \int_{\partial B} \left| I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma)^2) - G(I_h \gamma)^2 \right| \frac{|\gamma'|^2 |\xi'_h|^2}{(|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{2}}} \\
&\leq \lambda \left\| I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma)^2) - G(I_h \gamma)^2 \right\|_{L_2(\partial B)} \sqrt{\lambda} |\xi_h|_{H_4^1(\partial B)}^2 \\
&\leq \lambda^{\frac{3}{2}} \frac{h}{2} |G(I_h \gamma)^2|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_4^1(\partial B)}^2 \\
&\leq \lambda^{\frac{3}{2}} h \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} |I_h \gamma|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_4^1(\partial B)}^2 \\
&\leq \lambda^{\frac{3}{2}} C \sqrt{h} |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}^2.
\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned}
I_{20} &\leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} |G|_{C^{0,1}(T_\mu)} \int_{\partial B} |I_h \gamma - \gamma| \frac{|\gamma'|^2 |\xi'_h|^2}{(|\gamma'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{2}}} \\
&\leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} |G|_{C^{0,1}(T_\mu)} \int_{\partial B} |I_h \gamma - \gamma| \sqrt{\lambda} |\xi'_h|^2 \\
&\leq 2\lambda^{\frac{3}{2}} \|G\|_{C^0(T_\mu)} |G|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|I_h \gamma - \gamma\|_{L_2(\partial B)} |\xi_h|_{H_4^1(\partial B)}^2 \\
&\leq 2\lambda^{\frac{3}{2}} \|G\|_{C^0(T_\mu)} |G|_{C^{0,1}(T_\mu)} h |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_4^1(\partial B)}^2 \\
&\leq \lambda^{\frac{3}{2}} C \sqrt{h} |\gamma|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}^2,
\end{aligned}$$

mit (28) und (36). Der vorletzte Term ergibt Null und für den Letzten berechnen wir mit (28)

$$\left| \frac{2}{\lambda} \int_{\partial B} I_h \varrho |\xi_h|^2 - \frac{2}{\lambda} \int_{\partial B} \varrho |\xi_h|^2 \right| = \left| \frac{2}{\lambda} \int_{\partial B} (I_h \varrho - \varrho) |\xi_h|^2 \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2}{\lambda} \|I_h \varrho - \varrho\|_{L_2(\partial B)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \|\xi_h\|_{L_2(\partial B)} \leq \frac{2}{\lambda} h |\varrho|_{H_2^1(\partial B)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \|\xi_h\|_{L_2(\partial B)} \\
&\leq \frac{C}{\lambda} h \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \|\xi_h\|_{L_2(\partial B)}.
\end{aligned}$$

Also folgt wegen $\|\gamma\|_{H_2^1(\partial B)} \geq \sqrt{2\pi}\mu$, $\|\gamma\|_{H_2^{1/2}(\partial B)} \leq C\|\gamma\|_{H_2^1(\partial B)}$, der Einbettung $H_2^1(\partial B) \subset C^0(\partial B)$ und $\lambda \geq \lambda_0$ die Behauptung. \square

13 Fehlerabschätzung

Bevor wir zu den Hauptresultaten kommen, benötigen wir noch die folgende Abschätzung:

Proposition 29 *Sei $\gamma \in \mathcal{C}^*$, $\xi_h, \eta_h \in \mathcal{H}_h$ und h_0 so klein, dass $I_h\gamma \in \mathcal{C}_h \subset \mathcal{C}^*$ für alle $h \leq h_0$. Weiter sei $\|\eta_h\|_{H_2^1(\partial B)}$ so klein, dass $I_h\gamma + \eta_h \in \mathcal{C}_h \subset \mathcal{C}^*$ und $\lambda \geq \lambda_0 > 0$, dann gilt*

$$\begin{aligned} & |\delta^2 E_h^\lambda(I_h\gamma)(\xi_h, \xi_h) - \delta^2 E_h^\lambda(I_h\gamma + \eta_h)(\xi_h, \xi_h)| \\ & \leq C\lambda^2 \frac{1}{\sqrt{h}} \|\xi_h\|_{H_2^1(\partial B)}^2 \|\eta_h\|_{H_2^1(\partial B)} \|\gamma\|_{H_2^1(\partial B)}, \end{aligned}$$

wobei $C = C(S, \mu, \lambda_0, G, \varrho, P)$.

Beweis: Wir schätzen die Differenz der jeweils passenden Ausdrücke in (27) ab. Der erste Term fällt weg. Für den zweiten Term berechnen wir:

$$\begin{aligned} & \left| 2\lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (\langle \nabla G(I_h\gamma), \xi_h \rangle^2) \sqrt{|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right. \\ & \quad \left. - 2\lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (\langle \nabla G(I_h\gamma + \eta_h), \xi_h \rangle^2) \sqrt{|(I_h\gamma + \eta_h)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| \\ & \leq 2\lambda \int_{\partial B} \left| I_{\frac{h}{2}} (\langle \nabla G(I_h\gamma), \xi_h \rangle^2) - I_{\frac{h}{2}} (\langle \nabla G(I_h\gamma + \eta_h), \xi_h \rangle^2) \right| \sqrt{|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \\ & \quad + 2\lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (\langle \nabla G(I_h\gamma + \eta_h), \xi_h \rangle^2) \left| \sqrt{|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} - \sqrt{|(I_h\gamma + \eta_h)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| \\ & = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Mit (30) und (31) gilt

$$\begin{aligned} I_1 & \leq 2\lambda \left\| \langle \nabla G(I_h\gamma), \xi_h \rangle^2 - \langle \nabla G(I_h\gamma + \eta_h), \xi_h \rangle^2 \right\|_{C^0(\partial B)} \int_{\partial B} \sqrt{|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \\ & \leq 2\lambda \left\| \langle \nabla G(I_h\gamma) + \nabla G(I_h\gamma + \eta_h), \xi_h \rangle \langle \nabla G(I_h\gamma) - \nabla G(I_h\gamma + \eta_h), \xi_h \rangle \right\|_{C^0(\partial B)} \\ & \quad \cdot \sqrt{2\pi} \left(\|I_h\gamma\|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\ & \leq 4\lambda \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \|\nabla G\|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|\eta_h\|_{C^0(\partial B)} \sqrt{2\pi} \left(\|\gamma\|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\ & \leq \lambda C \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \|\eta_h\|_{C^0(\partial B)} \left(\|\gamma\|_{H_2^1(\partial B)} + 1 \right), \end{aligned}$$

wobei wir $\lambda \geq \lambda_0$ benutzt haben. Mit (30) und (34) erhalten wir

$$\begin{aligned} I_2 & \leq 2\lambda \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \int_{\partial B} \left| \sqrt{|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} - \sqrt{|(I_h\gamma + \eta_h)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| \\ & \leq 2\lambda \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \sqrt{2\pi} \|\eta_h\|_{H_2^1(\partial B)} \\ & \leq \lambda C \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \|\eta_h\|_{H_2^1(\partial B)}. \end{aligned}$$

Für den dritten Term gilt:

$$\begin{aligned}
& \left| 2\lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (G(I_h\gamma) \langle \xi_h, \nabla^2 G(I_h\gamma) \xi_h \rangle) \sqrt{|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right. \\
& \quad \left. - 2\lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (G(I_h\gamma + \eta_h) \langle \xi_h, \nabla^2 G(I_h\gamma + \eta_h) \xi_h \rangle) \sqrt{|(I_h\gamma + \eta_h)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| \\
& \leq 2\lambda \int_{\partial B} \left| I_{\frac{h}{2}} (G(I_h\gamma) \langle \xi_h, \nabla^2 G(I_h\gamma) \xi_h \rangle) \right. \\
& \quad \left. - I_{\frac{h}{2}} (G(I_h\gamma + \eta_h) \langle \xi_h, \nabla^2 G(I_h\gamma + \eta_h) \xi_h \rangle) \right| \sqrt{|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \\
& \quad + 2\lambda \int_{\partial B} \left| I_{\frac{h}{2}} (G(I_h\gamma + \eta_h) \langle \xi_h, \nabla^2 G(I_h\gamma + \eta_h) \xi_h \rangle) \right| \\
& \quad \cdot \left| \sqrt{|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} - \sqrt{|(I_h\gamma + \eta_h)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| = I_3 + I_4
\end{aligned}$$

Mit (30) und (31) gilt

$$\begin{aligned}
I_3 & \leq 2\lambda \left\| G(I_h\gamma) \langle \xi_h, \nabla^2 G(I_h\gamma) \xi_h \rangle - G(I_h\gamma + \eta_h) \langle \xi_h, \nabla^2 G(I_h\gamma + \eta_h) \xi_h \rangle \right\|_{C^0(\partial B)} \\
& \quad \cdot \int_{\partial B} \sqrt{|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \\
& \leq 2\lambda \left(\left\| (G(I_h\gamma) - G(I_h\gamma + \eta_h)) \langle \xi_h, \nabla^2 G(I_h\gamma) \xi_h \rangle \right\|_{C^0(\partial B)} \right. \\
& \quad \left. + \left\| G(I_h\gamma + \eta_h) (\langle \xi_h, \nabla^2 G(I_h\gamma) \xi_h \rangle - \langle \xi_h, \nabla^2 G(I_h\gamma + \eta_h) \xi_h \rangle) \right\|_{C^0(\partial B)} \right) \\
& \quad \cdot \sqrt{2\pi} \left(|I_h\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
& \leq 2\lambda \left(\|G\|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \|\nabla^2 G\|_{C^0(T_\mu)} \|\eta_h\|_{C^0(\partial B)} \right. \\
& \quad \left. + \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \|\nabla^2 G\|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|\eta_h\|_{C^0(\partial B)} \right) \sqrt{2\pi} \left(|\gamma|_{H_2^1(\partial B)} + \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \right) \\
& \leq \lambda C \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \|\eta_h\|_{C^0(\partial B)} \left(\|\gamma\|_{H_2^1(\partial B)} + 1 \right),
\end{aligned}$$

wobei wir $\lambda \geq \lambda_0$ benutzt haben. Mit (30) und (34) erhalten wir

$$\begin{aligned}
I_4 & \leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \|\nabla^2 G\|_{C^0(T_\mu)} \\
& \quad \cdot \int_{\partial B} \left| \sqrt{|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} - \sqrt{|(I_h\gamma + \eta_h)'|^2 + \frac{1}{\lambda}} \right| \\
& \leq 2\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 \|\nabla^2 G\|_{C^0(T_\mu)} \sqrt{2\pi} |\eta_h|_{H_2^1(\partial B)} \\
& \leq \lambda C \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)}^2 |\eta_h|_{H_2^1(\partial B)}.
\end{aligned}$$

Für den vierten und fünften Term berechnen wir:

$$\left| 4\lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (G(I_h\gamma) \langle \nabla G(I_h\gamma), \xi_h \rangle) \frac{\langle (I_h\gamma)', \xi_h' \rangle}{\sqrt{|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right|$$

$$\begin{aligned}
& -4\lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (G(I_h\gamma + \eta_h) \langle \nabla G(I_h\gamma + \eta_h), \xi_h \rangle) \frac{\langle (I_h\gamma + \eta_h)', \xi_h' \rangle}{\sqrt{|(I_h\gamma + \eta_h)'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \Big| \\
& \leq 4\lambda \int_{\partial B} \left| I_{\frac{h}{2}} (G(I_h\gamma) \langle \nabla G(I_h\gamma), \xi_h \rangle) - I_{\frac{h}{2}} (G(I_h\gamma + \eta_h) \langle \nabla G(I_h\gamma + \eta_h), \xi_h \rangle) \right| \\
& \quad \cdot \left| \frac{\langle (I_h\gamma)', \xi_h' \rangle}{\sqrt{|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right| + 4\lambda \int_{\partial B} \left| I_{\frac{h}{2}} (G(I_h\gamma + \eta_h) \langle \nabla G(I_h\gamma + \eta_h), \xi_h \rangle) \right| \\
& \quad \cdot \left| \frac{\langle (I_h\gamma)', \xi_h' \rangle}{\sqrt{|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} - \frac{\langle (I_h\gamma + \eta_h)', \xi_h' \rangle}{\sqrt{|(I_h\gamma + \eta_h)'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right| = I_5 + I_6
\end{aligned}$$

Mit (30) gilt

$$\begin{aligned}
I_5 & \leq 4\lambda \|G(I_h\gamma) \langle \nabla G(I_h\gamma), \xi_h \rangle - G(I_h\gamma + \eta_h) \langle \nabla G(I_h\gamma + \eta_h), \xi_h \rangle\|_{C^0(\partial B)} \\
& \quad \cdot \|\xi_h'\|_{L^1(\partial B)} \\
& \leq 4\lambda\sqrt{2\pi} \left(\| (G(I_h\gamma) - G(I_h\gamma + \eta_h)) \langle \nabla G(I_h\gamma), \xi_h \rangle \|_{C^0(\partial B)} \right. \\
& \quad \left. + \| G(I_h\gamma + \eta_h) (\langle \nabla G(I_h\gamma), \xi_h \rangle - \langle \nabla G(I_h\gamma + \eta_h), \xi_h \rangle) \|_{C^0(\partial B)} \right) \|\xi_h\|_{H^1_2(\partial B)} \\
& \leq 4\lambda\sqrt{2\pi} \left(\|G\|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|\eta_h\|_{C^0(\partial B)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \right. \\
& \quad \left. + \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|\eta_h\|_{C^0(\partial B)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \right) \|\xi_h\|_{H^1_2(\partial B)} \\
& \leq \lambda C \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \|\eta_h\|_{C^0(\partial B)} \|\xi_h\|_{H^1_2(\partial B)}.
\end{aligned}$$

Mit (30) und (32) folgt

$$\begin{aligned}
I_6 & \leq 4\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \\
& \quad \cdot \int_{\partial B} \left| \frac{(I_h\gamma)'}{\sqrt{|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} - \frac{(I_h\gamma + \eta_h)'}{\sqrt{|(I_h\gamma + \eta_h)'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right| |\xi_h'| \\
& \leq 4\lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|\nabla G\|_{C^0(T_\mu)} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \int_{\partial B} c\sqrt{\lambda} |\eta_h'| |\xi_h'| \\
& \leq C\lambda^{\frac{3}{2}} \|\xi_h\|_{C^0(\partial B)} \|\eta_h\|_{H^1_2(\partial B)} \|\xi_h\|_{H^1_2(\partial B)}.
\end{aligned}$$

Für den sechsten Term gilt

$$\begin{aligned}
& \left| \lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (G(I_h\gamma)^2) \frac{|\xi_h'|^2}{\sqrt{|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right. \\
& \quad \left. - \lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (G(I_h\gamma + \eta_h)^2) \frac{|\xi_h'|^2}{\sqrt{|(I_h\gamma + \eta_h)'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right| \\
& \leq \lambda \int_{\partial B} \left| I_{\frac{h}{2}} (G(I_h\gamma)^2) - I_{\frac{h}{2}} (G(I_h\gamma + \eta_h)^2) \right| \frac{|\xi_h'|^2}{\sqrt{|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \\
& \quad + \lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (G(I_h\gamma + \eta_h)^2) \left| \frac{|\xi_h'|^2}{\sqrt{|(I_h\gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} - \frac{|\xi_h'|^2}{\sqrt{|(I_h\gamma + \eta_h)'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right|
\end{aligned}$$

$$= I_7 + I_8.$$

Mit (30) gilt

$$\begin{aligned} I_7 &\leq \lambda \|G(I_h \gamma)^2 - G(I_h \gamma + \eta_h)^2\|_{C^0(\partial B)} \sqrt{\lambda} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}^2 \\ &\leq \lambda^{\frac{3}{2}} \|(G(I_h \gamma) + G(I_h \gamma + \eta_h))(G(I_h \gamma) - G(I_h \gamma + \eta_h))\|_{C^0(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}^2 \\ &\leq 2\lambda^{\frac{3}{2}} \|G\|_{C^0(T_\mu)} \|G\|_{C^{0,1}(T_\mu)} \|\eta_h\|_{C^0(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}^2 \\ &\leq C\lambda^{\frac{3}{2}} \|\eta_h\|_{C^0(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}^2. \end{aligned}$$

Mit (30), (35) und (36) folgt

$$\begin{aligned} I_8 &\leq \lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \int_{\partial B} \left| \frac{1}{\sqrt{|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} - \frac{1}{\sqrt{|(I_h \gamma + \eta_h)'|^2 + \frac{1}{\lambda}}} \right| |\xi_h'|^2 \\ &\leq \lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \int_{\partial B} \lambda |\eta_h'| |\xi_h'|^2 \leq \lambda^2 \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 |\eta_h|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_4^1(\partial B)}^2 \\ &\leq C\lambda^2 \frac{1}{\sqrt{h}} |\eta_h|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}^2. \end{aligned}$$

Für den siebten Term gilt

$$\begin{aligned} &\left| \lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma)^2) \frac{\langle (I_h \gamma)', \xi_h' \rangle^2}{(|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &\quad \left. - \lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma + \eta_h)^2) \frac{\langle (I_h \gamma + \eta_h)', \xi_h' \rangle^2}{(|(I_h \gamma + \eta_h)'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{2}}} \right| \\ &\leq \lambda \int_{\partial B} \left| I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma)^2) - I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma + \eta_h)^2) \right| \frac{\langle (I_h \gamma)', \xi_h' \rangle^2}{(|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad + \lambda \int_{\partial B} I_{\frac{h}{2}} (G(I_h \gamma + \eta_h)^2) \left| \frac{\langle (I_h \gamma)', \xi_h' \rangle^2}{(|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{2}}} - \frac{\langle (I_h \gamma + \eta_h)', \xi_h' \rangle^2}{(|(I_h \gamma + \eta_h)'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{2}}} \right| \\ &= I_9 + I_{10}. \end{aligned}$$

Analog zum sechsten Term gilt mit (30)

$$\begin{aligned} I_9 &\leq \lambda \|G(I_h \gamma)^2 - G(I_h \gamma + \eta_h)^2\|_{C^0(\partial B)} \sqrt{\lambda} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}^2 \\ &\leq C\lambda^{\frac{3}{2}} \|\eta_h\|_{C^0(\partial B)} |\xi_h|_{H_2^1(\partial B)}^2. \end{aligned}$$

Weiter erhalten wir mit (30), (33) und (36)

$$\begin{aligned} I_{10} &\leq \lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \int_{\partial B} \left| \left\langle \frac{(I_h \gamma)'}{(|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{4}}} + \frac{(I_h \gamma + \eta_h)'}{(|(I_h \gamma + \eta_h)'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{4}}}, \xi_h' \right\rangle \right. \\ &\quad \left. \cdot \left\langle \frac{(I_h \gamma)'}{(|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{4}}} - \frac{(I_h \gamma + \eta_h)'}{(|(I_h \gamma + \eta_h)'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{4}}}, \xi_h' \right\rangle \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lambda \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \int_{\partial B} 2\sqrt[4]{\lambda} |\xi'_h|^2 \left| \frac{(I_h \gamma)'}{(|(I_h \gamma)'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{4}}} - \frac{(I_h \gamma + \eta_h)'}{(|(I_h \gamma + \eta_h)'|^2 + \frac{1}{\lambda})^{\frac{3}{4}}} \right| \\
&\leq 2\lambda^{\frac{5}{4}} \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \int_{\partial B} |\xi'_h|^2 c \lambda^{\frac{3}{4}} |\eta'_h| \leq \lambda^2 \|G\|_{C^0(T_\mu)}^2 \|\eta_h\|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_4^1(\partial B)}^2 \\
&\leq C \lambda^2 \frac{1}{\sqrt{h}} \|\eta_h\|_{H_2^1(\partial B)} |\xi_h|_{H_4^1(\partial B)}^2.
\end{aligned}$$

Da die letzten beiden Term verschwinden, folgt hier schon die Behauptung unter Verwendung von $\|\gamma\|_{H_2^1(\partial B)} \geq \sqrt{2\pi}\mu$ und $\lambda \geq \lambda_0$. \square

Wir benötigen die folgende quantitative Version des Satzes über die Umkehrfunktion, für einen Beweis siehe [3]:

Lemma 30 *Seien X, Y Banachräume, $x_0 \in X$, $\Omega \subset X$ eine offene Umgebung von x_0 und $f \in C^1(\Omega, Y)$. Es gebe positive Konstanten $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$, so dass $\overline{B}_\epsilon(x_0) \subset \Omega$ und*

$$\begin{aligned}
&\|f(x_0)\|_Y \leq \delta, \quad \|f'(x_0)^{-1}\|_{L(Y, X)} \leq \alpha^{-1}, \\
&\|f'(x) - f'(x_0)\|_{L(X, Y)} \leq \beta \quad \forall x \in \overline{B}_\epsilon(x_0),
\end{aligned}$$

wobei $\beta < \alpha$ und $\delta \leq (\alpha - \beta)\epsilon$. Dann existiert ein eindeutiges $\tilde{x} \in \overline{B}_\epsilon(x_0)$, so dass $f(\tilde{x}) = 0$.

Damit können wir nun die Fehlerabschätzung beweisen. Dazu nehmen wir a-priori an, dass die zweite Variation von E_λ in einem Minimum γ positiv definit ist, dass also $\delta^2 E_\lambda(\gamma)(\xi, \xi) \geq K \|\xi\|_{H_2^1(\partial B)}^2$ für ein $K > 0$ und alle $\xi \in H_2^1(\partial B)$.

Bemerkung: Diese a-priori-Bedingung ist sinnvoll, da wir davon ausgehen können, dass E_λ keine Invarianzen besitzt. (Siehe auch die Bemerkung zur Konstruktion des Funktional in Kapitel 2.) Leider können wir dies nicht beweisen, da das Zusammenspiel der einzelnen Terme in (1) bzw. (18) sehr kompliziert ist. Allerdings ist das Dirichletintegral bekannterweise nur unter konformen Umparometrisierungen invariant, diese wären also die einzigen offensichtlichen Kandidaten. Unter einer konformen Umparometrisierung, die keiner Drehung der Kreisscheibe entspricht, ist aber der dritte Term nicht invariant. (Dies kann man z.B. so sehen: Sei $\gamma \in \mathcal{C}^*$ nach Bogenlänge parametrisiert und ψ eine solche Umparometrisierung. Dann gilt $\int_{\partial B} |\gamma|^2 < \int_{\partial B} |\gamma(\psi)|^2$, da $\gamma(\psi)$ sicherlich nicht mehr nach Bogenlänge parametrisiert ist.) Schließlich ist der vierte Term offensichtlich unter Drehungen der Kreisscheibe nicht invariant.

Satz 31 *Sei $\gamma_\lambda \in \mathcal{C}^*$ ein Minimum von E_λ mit $\delta^2 E_\lambda(\gamma_\lambda)(\xi, \xi) \geq K(\lambda) \|\xi\|_{H_2^1(\partial B)}^2$ für ein $K(\lambda) > 0$ und alle $\xi \in H_2^1(\partial B)$, wobei $\lambda \geq \lambda_0 > 0$. Dann existieren positive Konstanten $h_0(\lambda)$ und $c_0(\lambda)$, so dass für alle $0 < h \leq h_0(\lambda)$ eine eindeutige Lösung $\gamma_h^\lambda \in \mathcal{C}_h$ des diskreten Problems existiert, welche*

$$\|\gamma_\lambda - \gamma_h^\lambda\|_{H_2^1(\partial B)} \leq c_0(\lambda)h$$

erfüllt. Außerdem existiert eine Konstante $\epsilon_0(\lambda)$, so dass γ_h^λ die eindeutige Lösung des diskreten Problems ist, für die

$$\|\gamma_\lambda - \gamma_h^\lambda\|_{H_2^1(\partial B)} \leq \epsilon_0(\lambda)\sqrt{h}$$

erfüllt ist.

Beweis: Wir wenden Lemma 30 auf $X = \mathcal{H}_h$, $\Omega = \mathcal{C}_h$, $Y = \mathcal{H}'_h$, $f = \delta E_h^\lambda$ und $x_0 = I_h \gamma_\lambda$ an. Beachte im Folgenden, dass $\delta E_h^\lambda \in C^1(\mathcal{C}_h, \mathcal{H}'_h)$ nach Corollar 17 und $\gamma_\lambda \in H_2^2(\partial B)$ nach Satz 14.

Sei $h_1(\lambda)$ so klein, dass $I_h \gamma_\lambda \subset \mathcal{C}_h$ für alle $0 < h \leq h_1(\lambda)$. Nach Proposition 27 gilt

$$|\delta E_h^\lambda(I_h \gamma_\lambda)(\xi_h) - \delta E_\lambda(\gamma_\lambda)(\xi_h)| \leq \lambda^{\frac{3}{2}} c_1 h \|\gamma_\lambda\|_{H_2^2(\partial B)}^2 \|\xi_h\|_{H_2^1(\partial B)}.$$

Da $\delta E_\lambda(\gamma_\lambda)(\xi_h) = 0$ für alle $\xi_h \in \mathcal{H}_h$ folgt also

$$\|\delta E_h^\lambda(I_h \gamma_\lambda)\|_{\mathcal{H}'_h} = \sup_{\xi_h \in \mathcal{H}_h} \frac{|\delta E_h^\lambda(I_h \gamma_\lambda)(\xi_h)|}{\|\xi_h\|_{H_2^1(\partial B)}} \leq \lambda^{\frac{3}{2}} c_1 h \|\gamma_\lambda\|_{H_2^2(\partial B)}^2,$$

wir wählen demnach $\delta = \lambda^{\frac{3}{2}} c_1 h \|\gamma_\lambda\|_{H_2^2(\partial B)}^2$. Nach Proposition 28 haben wir

$$|\delta^2 E_h^\lambda(I_h \gamma_\lambda)(\xi_h, \xi_h) - \delta^2 E_\lambda(\gamma_\lambda)(\xi_h, \xi_h)| \leq \lambda^2 c_2 \sqrt{h} \|\gamma_\lambda\|_{H_2^2(\partial B)}^2 \|\xi_h\|_{H_2^1(\partial B)}^2.$$

Wegen $\delta^2 E_\lambda(\gamma_\lambda)(\xi_h, \xi_h) \geq K(\lambda) \|\xi_h\|_{H_2^1(\partial B)}^2$ für alle $\xi_h \in \mathcal{H}_h$ erhalten wir also $\delta^2 E_h^\lambda(I_h \gamma_\lambda)(\xi_h, \xi_h) \geq \frac{K(\lambda)}{2} \|\xi_h\|_{H_2^1(\partial B)}^2$ für $0 < h \leq h_2(\lambda) = \left(\frac{K(\lambda)}{2\lambda^2 c_2 \|\gamma_\lambda\|_{H_2^2(\partial B)}^2} \right)^2$ und damit

$$\begin{aligned} \|\delta^2 E_h^\lambda(I_h \gamma_\lambda)\|_{L(\mathcal{H}_h, \mathcal{H}'_h)} &= \sup_{\xi_h, \tilde{\xi}_h \in \mathcal{H}_h} \frac{|\delta^2 E_h^\lambda(I_h \gamma_\lambda)(\xi_h, \tilde{\xi}_h)|}{\|\xi_h\|_{H_2^1(\partial B)} \|\tilde{\xi}_h\|_{H_2^1(\partial B)}} \\ &\geq \sup_{\xi_h \in \mathcal{H}_h} \frac{|\delta^2 E_h^\lambda(I_h \gamma_\lambda)(\xi_h, \xi_h)|}{\|\xi_h\|_{H_2^1(\partial B)}^2} \geq \frac{K(\lambda)}{2}. \end{aligned}$$

Folglich ist $\delta^2 E_h^\lambda(I_h \gamma_\lambda)$ invertierbar und es gilt

$$\left\| (\delta^2 E_h^\lambda(I_h \gamma_\lambda))^{-1} \right\|_{L(\mathcal{H}'_h, \mathcal{H}_h)} \leq \left(\frac{K(\lambda)}{2} \right)^{-1},$$

wir wählen also $\alpha = \frac{K(\lambda)}{2}$. Sei $\epsilon_1(\lambda)$ so klein, dass $I_h \gamma_\lambda + \eta_h \in \mathcal{C}_h$ für alle $\eta_h \in \mathcal{H}_h$ mit $\frac{1}{c} \|\eta_h\|_{C^0(\partial B)} \leq \|\eta_h\|_{H_2^1(\partial B)} \leq \epsilon_1(\lambda)$. Nach Proposition 29 gilt dann

$$\begin{aligned} &|\delta^2 E_h^\lambda(I_h \gamma_\lambda)(\xi_h, \xi_h) - \delta^2 E_h^\lambda(I_h \gamma_\lambda + \eta_h)(\xi_h, \xi_h)| \\ &\leq c_3 \lambda^2 \frac{1}{\sqrt{h}} \|\xi_h\|_{H_2^1(\partial B)}^2 \|\eta_h\|_{H_2^1(\partial B)} \|\gamma_\lambda\|_{H_2^2(\partial B)} \end{aligned}$$

für alle $\eta_h \in \mathcal{H}_h$ mit $\|\eta_h\|_{H_2^1(\partial B)} \leq \epsilon_1(\lambda)$. Aufgrund der Symmetrie von $\delta^2 E_h^\lambda$ erhalten wir somit nach Proposition 25

$$\|\delta^2 E_h^\lambda(I_h \gamma_\lambda) - \delta^2 E_h^\lambda(I_h \gamma_\lambda + \eta_h)\|_{L(\mathcal{H}_h, \mathcal{H}'_h)} \leq \frac{K(\lambda)}{4}$$

falls $\frac{1}{\sqrt{h}} \|\eta_h\|_{H_2^1(\partial B)} \leq \frac{K(\lambda)}{4c_3 \lambda^2 \|\gamma_\lambda\|_{H_2^2(\partial B)}} = \epsilon_2(\lambda)$ und wir wählen $\beta = \frac{K(\lambda)}{4}$ sowie $\epsilon = \epsilon_2(\lambda) \sqrt{h}$. Sei $h_3(\lambda) = \left(\frac{4c_3 \lambda^2 \|\gamma_\lambda\|_{H_2^2(\partial B)} \epsilon_1(\lambda)}{K(\lambda)} \right)^2$, dann folgt $\epsilon_2(\lambda) \sqrt{h} \leq \epsilon_1(\lambda)$

für alle $0 < h \leq h_3(\lambda)$, d.h. $\overline{B}_\epsilon(x_0) \subset \Omega$.

Mit $h_4 = \left(\frac{K(\lambda)^2}{16c_1c_3\lambda^7\|\gamma_\lambda\|_{H_2^2(\partial B)}^3} \right)^2$, gilt $\lambda^{\frac{3}{2}}c_1h\|\gamma_\lambda\|_{H_2^2(\partial B)}^2 \leq \frac{K(\lambda)}{4}\epsilon_2(\lambda)\sqrt{h}$ für alle

$0 < h \leq h_4(\lambda)$, d.h. $\delta \leq (\alpha - \beta)\epsilon$.

Für alle $0 < h \leq \min\{h_1(\lambda), h_2(\lambda), h_3(\lambda), h_4(\lambda)\}$ sind nun die erforderlichen Voraussetzungen von Lemma 30 erfüllt. Es existiert also ein eindeutiges $\gamma_h^\lambda \in \mathcal{C}_h$ mit $\delta E_h^\lambda(\gamma_h^\lambda)(\xi_h) = 0$ für alle $\xi_h \in \mathcal{H}_h$ und

$$\|I_h\gamma_\lambda - \gamma_h^\lambda\|_{H_2^1(\partial B)} \leq \epsilon = \epsilon_2(\lambda)\sqrt{h}.$$

Nun wenden wir Lemma 30 auf $\alpha = \frac{K(\lambda)}{2}$, $\beta = \frac{K(\lambda)}{4}$, $\delta = \lambda^{\frac{3}{2}}c_1h\|\gamma_\lambda\|_{H_2^2(\partial B)}^2$ und $\tilde{\epsilon} = \frac{4}{K(\lambda)}\lambda^{\frac{3}{2}}c_1h\|\gamma_\lambda\|_{H_2^2(\partial B)}^2$ an. Dann gilt $\delta = (\alpha - \beta)\tilde{\epsilon}$ und für alle h mit $0 < h \leq h_5(\lambda) = \frac{h_4(\lambda)}{9}$ gilt $\tilde{\epsilon} \leq \frac{\epsilon_2(\lambda)\sqrt{h}}{3} = \frac{\epsilon}{3}$. Also erfüllt die eindeutige Lösung γ_h^λ des diskreten Problems sogar

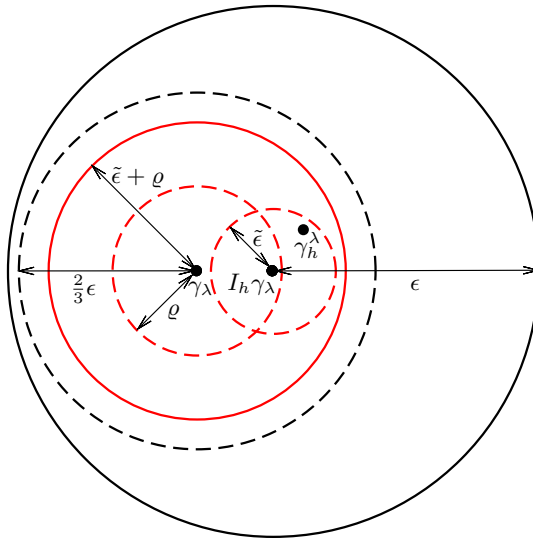
$$\|I_h\gamma_\lambda - \gamma_h^\lambda\|_{H_2^1(\partial B)} \leq \tilde{\epsilon} = \frac{4}{K(\lambda)}\lambda^{\frac{3}{2}}c_1h\|\gamma_\lambda\|_{H_2^2(\partial B)}^2. \quad (43)$$

Mit $h_6(\lambda) = \left(\frac{\lambda_0^{3\setminus 2}K(\lambda)}{12c_3\lambda^7\|\gamma_\lambda\|_{H_2^2(\partial B)}^2} \right)^2$ gilt $\varrho := \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^{\frac{3}{2}}h\|\gamma_\lambda\|_{H_2^2(\partial B)} \leq \frac{\epsilon_2(\lambda)\sqrt{h}}{3} = \frac{\epsilon}{3}$ für alle h mit $0 < h \leq h_6(\lambda)$ und es folgt $\|\gamma_\lambda - I_h\gamma_\lambda\|_{H_2^1(\partial B)} \leq h\|\gamma_\lambda\|_{H_2^2(\partial B)} \leq \varrho$ nach (29). Wir haben also

$$\|\gamma_\lambda - \gamma_h^\lambda\|_{H_2^1(\partial B)} \leq \|\gamma_\lambda - I_h\gamma_\lambda\|_{H_2^1(\partial B)} + \|I_h\gamma_\lambda - \gamma_h^\lambda\|_{H_2^1(\partial B)} \leq \tilde{\epsilon} + \varrho \leq \frac{2}{3}\epsilon$$

und wir erhalten mit $h_0(\lambda) = \min\{h_1(\lambda), h_2(\lambda), h_3(\lambda), h_4(\lambda), h_5(\lambda), h_6(\lambda)\}$, $c_0(\lambda) = \lambda^{\frac{3}{2}}\left(\frac{4}{K(\lambda)}c_1\|\gamma_\lambda\|_{H_2^2(\partial B)}^2 + \left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^{\frac{3}{2}}\|\gamma_\lambda\|_{H_2^2(\partial B)}\right)$ und $\epsilon_0(\lambda) = \frac{2}{3}\epsilon_2(\lambda)$ die Behauptung (siehe Abbildung 4). \square

Abbildung 4: Innerhalb des roten, durchgezogenen Kreises haben wir Existenz, Eindeutigkeit gilt sogar innerhalb des größeren, schwarz-gestrichelten Kreises.



Wir können mit Hilfe dieses Ergebnisses auch eine Fehlerabschätzung für die zugehörigen diskreten Flächen $\Phi_h(\gamma_h^\lambda(\pi^{-1}))$ berechnen:

Satz 32 Die Lösungen $\gamma_h^\lambda \in \mathcal{C}_h$ des diskreten Problems aus Satz 31 erfüllen

$$\|\Phi(\gamma_\lambda) - \Phi_h(\gamma_h^\lambda(\pi^{-1}))\|_{H_2^1(B_h)} \leq \tilde{c}_0(\lambda)h$$

mit einer Konstanten $\tilde{c}_0(\lambda)$.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} & \|\Phi(\gamma_\lambda) - \Phi_h(\gamma_h^\lambda(\pi^{-1}))\|_{H_2^1(B_h)} \leq \|\Phi(\gamma_\lambda) - \Phi_h(I_h \gamma_\lambda(\pi^{-1}))\|_{H_2^1(B_h)} \\ & + \|\Phi_h(I_h \gamma_\lambda(\pi^{-1})) - \Phi_h(\gamma_h^\lambda(\pi^{-1}))\|_{H_2^1(B_h)} = A + B. \end{aligned}$$

Nach (41) gilt

$$A \leq Ch|\gamma|_{H_2^{3/2}(\partial B)}$$

und mit (42), (14) sowie (43) erhalten wir

$$\begin{aligned} B &= \|\Phi_h((I_h \gamma_\lambda - \gamma_h^\lambda)(\pi^{-1}))\|_{H_2^1(B_h)} \leq C\|\Phi(I_h \gamma_\lambda - \gamma_h^\lambda)\|_{H_2^1(B)} \\ &\leq C\|I_h \gamma_\lambda - \gamma_h^\lambda\|_{H_2^1(\partial B)} \leq \frac{C}{K(\lambda)} \lambda^{\frac{3}{2}} h \|\gamma_\lambda\|_{H_2^2(\partial B)}^2. \end{aligned}$$

Weiter gilt mit einer Poincare-Ungleichung (Siehe Ungleichung (125) in [8].)

$$\begin{aligned} & \|\Phi(\gamma_\lambda) - \Phi_h(\gamma_h^\lambda(\pi^{-1}))\|_{L_2(B_h)} \leq C \left(\|\Phi(\gamma_\lambda) - \Phi_h(\gamma_h^\lambda(\pi^{-1}))\|_{H_2^1(B_h)} \right. \\ & \left. + \|\Phi(\gamma_\lambda) - \Phi_h(\gamma_h^\lambda(\pi^{-1}))\|_{L_2(\partial B_h)} \right) \end{aligned}$$

und mit $\|f\|_{L_2(\partial B_h)} \leq \|f(\pi)\|_{L_2(\partial B)}$ für $f \in L_2(\partial B_h)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & \|\Phi(\gamma_\lambda) - \Phi_h(\gamma_h^\lambda(\pi^{-1}))\|_{L_2(\partial B_h)} \leq \|(\Phi(\gamma_\lambda))(\pi) - \gamma_h^\lambda\|_{L_2(\partial B)} \\ & \leq \|(\Phi(\gamma_\lambda))(\pi) - I_h \gamma_\lambda\|_{L_2(\partial B)} + \|I_h \gamma_\lambda - \gamma_h^\lambda\|_{L_2(\partial B)} = \tilde{A} + \tilde{B}. \end{aligned}$$

Mit (39) und (29) folgt

$$\tilde{A} \leq \|(\Phi(\gamma_\lambda))(\pi) - \gamma_\lambda\|_{L_2(\partial B)} + \|\gamma_\lambda - I_h \gamma_\lambda\|_{L_2(\partial B)} \leq Ch^2 |\gamma_\lambda|_{H_2^1(\partial B)} + h |\gamma_\lambda|_{H_2^1(\partial B)}.$$

Nach (43) erhalten wir schließlich

$$\tilde{B} \leq \frac{C}{K(\lambda)} \lambda^{\frac{3}{2}} h \|\gamma_\lambda\|_{H_2^2(\partial B)}^2.$$

Da wir ohne Einschränkung annehmen können, dass $K(\lambda)$ nach oben beschränkt ist, erhalten wir insgesamt

$$\|\Phi(\gamma_\lambda) - \Phi_h(\gamma_h^\lambda(\pi^{-1}))\|_{H_2^1(\partial B_h)} \leq \frac{C}{K(\lambda)} \lambda^{\frac{3}{2}} h \|\gamma_\lambda\|_{H_2^2(\partial B)}^2 =: \tilde{c}_0(\lambda)h,$$

wobei die Konstante C von λ_0 und h_0 abhängt, aber nicht von λ . \square

In den obigen Resultaten ist es schwierig zu sehen, in welcher Weise die Konstanten von λ abhängen. Fordern wir noch zusätzlich, dass $K(\lambda) = K \cdot \lambda^{-\alpha}$, $K, \alpha \in (0, \infty)$ und dass die H_2^2 -Norm der Lösungen γ_λ unabhängig von λ beschränkt ist, so gilt unter diesen zusätzlichen a-priori Annahmen das folgende, genauere Ergebnis:

Satz 33 Seien $K > 0$ und $\alpha > 0$. Weiter sei $\gamma_\lambda \in \mathcal{C}^*$ ein Minimum von E_λ mit $\delta^2 E_\lambda(\gamma_\lambda)(\xi, \xi) \geq K\lambda^{-\alpha} \|\xi\|_{H_2^1(\partial B)}^2$ für alle $\xi \in H_2^1(\partial B)$, wobei $\lambda \geq \lambda_0 = \max \left\{ \frac{D(\tilde{X})+2}{\mu_0 h(\frac{\mu_0}{2})}, \int_{\partial B} (|\tilde{X}_\varphi|^2 + \varrho |\tilde{X} - P|^2) \right\}$, $0 < \mu_0 < \mu$ beliebig, \tilde{X} eine Lösung von $\mathcal{P}(\Pi, S)$. Es gelte $\|\gamma_\lambda\|_{H_2^2(\partial B)} \leq C$, für alle Lösungen γ_λ von \mathcal{P}_λ^* mit $\lambda \geq \lambda_0$. Dann existieren positive, von λ unabhängige Konstanten h_0 und c_0 , so dass für alle $0 < h \leq h_0 \frac{1}{\lambda^{7+4\alpha}}$ eine eindeutige Lösung $\gamma_h^\lambda \in \mathcal{C}_h$ des diskreten Problems existiert, welche

$$\|\gamma_\lambda - \gamma_h^\lambda\|_{H_2^1(\partial B)} \leq c_0 \lambda^{\frac{3}{2}+\alpha} h$$

erfüllt. Außerdem existiert eine von λ unabhängige Konstante ϵ_0 , so dass γ_h^λ die eindeutige Lösung des diskreten Problems ist, für die

$$\|\gamma_\lambda - \gamma_h^\lambda\|_{H_2^1(\partial B)} \leq \epsilon_0 \frac{1}{\lambda^{2+\alpha}} \sqrt{h}$$

erfüllt ist.

Beweis: Wir schauen uns die Konstanten an, die im Beweis von Satz 31 auftauchen: Zuerst einmal können h_1 und ϵ_1 wegen Corollar 7 unabhängig von λ gewählt werden. (Dies ist nicht trivial, wir verzichten hier aber auf den Beweis dieser bildlich offensichtlichen Aussage.)

Ersetzen wir im Beweis von Satz 31 überall $K(\lambda)$ durch $K\lambda^{-\alpha}$ und $\|\gamma_\lambda\|_{H_2^2(\partial B)}$ durch C , so erhalten wir die Behauptung. \square

Bemerkung: Für die Fehlerabschätzung der Flächen (Satz 32) erhalten wir eine entsprechende Aussage.

14 Numerische Ergebnisse

Alle numerischen Ergebnisse und Graphiken in diesem Kapitel sind mit Mathematica (Version 10.2) berechnet worden, wobei insbesondere die benutzen Gitter mit der Mathematica-Funktion „DiskretiseRegion“ erzeugt wurden.

Zuerst einmal überlegen wir uns, dass es numerisch günstiger ist, das Funktional

$$F_{\lambda,\eta}(X) = D(X) + \lambda \int_{\partial B} G(X)^2 \sqrt{|X_\varphi|^2 + \frac{1}{\eta}} + \frac{1}{\eta} \int_{\partial B} (|X_\varphi|^2 + \varrho |X - P|^2)$$

und eine entsprechende diskrete Version $E_h^{\lambda,\eta}$ davon zu benutzen (zum Vergleich siehe (25)), wobei wir λ und η durch $\eta = C\lambda$, $C > 0$ koppeln. Damit haben wir einen größeren Spielraum und können das Funktional durch „Einstellen“ der Konstante C bestmöglich an das Problem anpassen. Es ist klar, dass dies keinen Unterschied in der Analysis macht und wir schreiben statt $F_{\lambda,\eta}$, $X_{\lambda,\eta}$ usw. einfach wieder F_λ , X_λ usw., weil η durch die Kopplung wieder von λ abhängt. In den folgenden Beispielen setzen wir generell $P = (1, 0, 0)$ und

$$\varrho(\varphi) = \begin{cases} 1 - \frac{\varphi}{\pi} & \text{in } [0, \pi] \\ \frac{\varphi}{\pi} - 1 & \text{in } [\pi, 2\pi] \end{cases}.$$

Für eine gegebene Funktion G , Werte λ und η , eine Gitterweite h sowie eine Fehlertoleranz ϵ benutzen wir immer den in Kapitel 10 angegebenen Algorithmus zur Berechnung der Lösung des diskreten Problems.

Leider ist es uns nicht möglich, eine Konvergenzordnung in h zu beobachten (siehe Satz 31), da wir in keinem Beispiel eine exakte Lösung kennen oder auch nur raten können. Nehmen wir für S z.B. den Torus, so sind die exakten Lösungen X_λ von \mathcal{P}_λ nur näherungsweise Kreisscheiben, wir haben also keine Möglichkeit, diese zu bestimmen. Dies liegt natürlich an dem nicht rotationsinvarianten, vierten Term des Funktionals F_λ , der die Fläche etwas verzerrt (siehe Abbildung 6 und 7). Wir wollen nun erstmal überprüfen, ob wir zumindest bildlich die erwarteten Ergebnisse erhalten.

Beispiel 1: Um den Torus darzustellen verwenden wir die Funktion

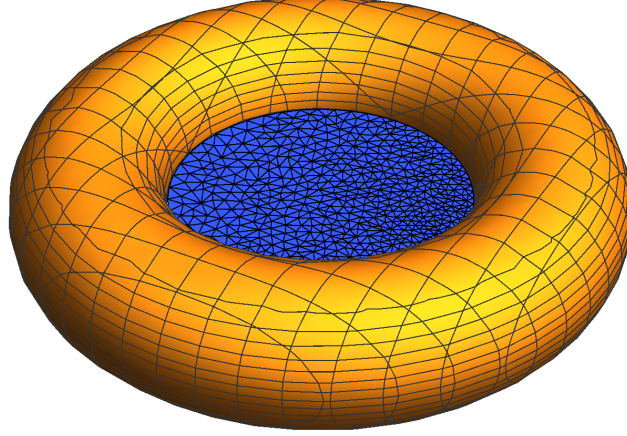
$$G(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + 2)^2 - 9(x^2 + y^2).$$

Wir nehmen $\lambda = 1$, $C = 100$ (also $\eta = 100\lambda$) und die Fehlertoleranz $\epsilon = 0.001$. Dann erhalten wir

h	Dreiecke	$E_h^\lambda(\gamma_h)$	$D_h(\gamma_h)$
0.50866	73	3.19262	3.03613
0.25334	303	3.18796	3.04942
0.13443	1174	3.18924	3.05240
0.07000	4969	3.18966	3.05301

(44)

Abbildung 5: Bild zu Tabelle (44) für $h = 0.13443$



Für ein Bild mit $h = 0.07000$ siehe Abbildung 6.

Bemerkung: Lassen wir den vierten Term des Funktionals F_λ in der Implementierung einfach weg, so können wir davon ausgehen, dass die exakten Lösungen X_λ Kreisscheiben sind, deren Radius R wir numerisch bestimmen können, indem wir das nur noch von R abhängige Funktional F_λ minimieren. Mit dieser Vereinfachung beobachten wir (zumindest beim Torus) sehr gute experimentelle Konvergenzordnungen in h . Dies ist aber streng genommen Zufall und nur durch eine spezielle Wahl der Startwerte möglich, da in diesem Fall jede Fläche, die aus der exakten Lösung durch eine Umparametrisierung in Form einer Drehung der Kreisscheibe hervorgeht, ebenfalls wieder eine Lösung ist. Außerdem weist der Torus natürlich viele Symmetrien auf, die Aussagekraft einer solchen Berechnung ist also eher mäßig!

Wollen wir untersuchen, welche Konvergenzordnung in λ wir numerisch beobachten (siehe Satz 10), so bietet sich der Torus als denkbar simpelstes Beispiel an. Die Lösung \tilde{X} des freien Randwertproblems (siehe Satz 1) ist hier einfach eine Kreisscheibe, deren Radius dem Innenradius des Torus entspricht. Wir haben also $\tilde{X}(x, y, z) = (x, y, 0)$ und damit $D(\tilde{X}) = \pi$. Für λ_1, λ_2 und dazugehörige Minima $\gamma_h^{\lambda_1}, \gamma_h^{\lambda_2}$ von $E_h^{\lambda_1}$ bzw. $E_h^{\lambda_2}$ definieren wir die experimentelle Konvergenzordnung eoc (experimental order of convergence) durch

$$eoc(E_h^\lambda) = \ln \left(\frac{|E_h^{\lambda_1}(\gamma_h^{\lambda_1}) - D(\tilde{X})|}{|E_h^{\lambda_2}(\gamma_h^{\lambda_2}) - D(\tilde{X})|} \right) \bigg/ \ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)$$

bzw.

$$eoc(D_h) = \ln \left(\frac{\left| D_h \left(\Phi_h(\gamma_h^{\lambda_1}(\pi^{-1})) \right) - D(\tilde{X}) \right|}{\left| D_h \left(\Phi_h(\gamma_h^{\lambda_2}(\pi^{-1})) \right) - D(\tilde{X}) \right|} \right) \bigg/ \ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right).$$

Im Gegensatz zu Satz 10 betrachten wir hier die diskreten Versionen der Funktionale F_λ und D . (Wie oben schon erwähnt, kennen wir keine exakten Lösungen.)

Dabei ist zu beachten, dass es durch unsere Wahl der Diskretisierung unmöglich ist, für festes h eine Konvergenz für $\lambda \rightarrow \infty$ zu beobachten: Da die Mittelpunkte der Außenkanten ebenfalls ausgewertet werden, ist der Fehler allein durch den Strafterm nach unten beschränkt (abhängig von h). Solange die Außenkanten γ_h der diskreten Flächen die Stützfläche S aber noch nicht schneiden, erwarten wir realistische Näherungen, da dann der Wert des diskreten Strafterms in etwa dem des kontinuierlichen entsprechen sollte.

Wir nehmen also ein sehr feines Gitter ($h = 0.07$), die Fehlertoleranz $\epsilon = 0.001$ und $C = 100$ (also $\eta = 100\lambda$). Um den Torus darzustellen verwenden wir die Funktion G aus Beispiel 1. Dann sind S und γ_h für $\lambda \leq 20$ noch disjunkt und wir erhalten

λ	$E_h^\lambda(\gamma_h)$	$eoc(E_h^\lambda)$	$D_h(\gamma_h)$	$eoc(D_h)$
1	3.18966	—	3.05301	—
2	3.16601	0.97715	3.09751	1.00681
4	3.15383	0.99662	3.11951	0.99730
8	3.14768	1.00741	3.13045	0.98682
16	3.14464	0.99826	3.13592	0.97400

(45)

Abbildung 6: Bild zu Tabelle (45) für $\lambda = 1$:

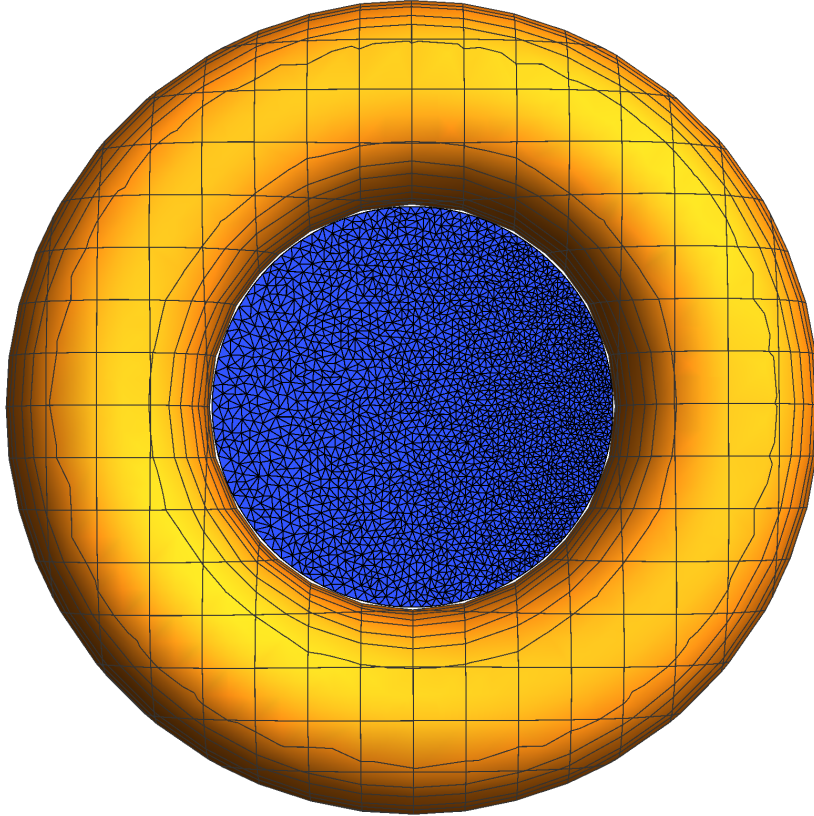
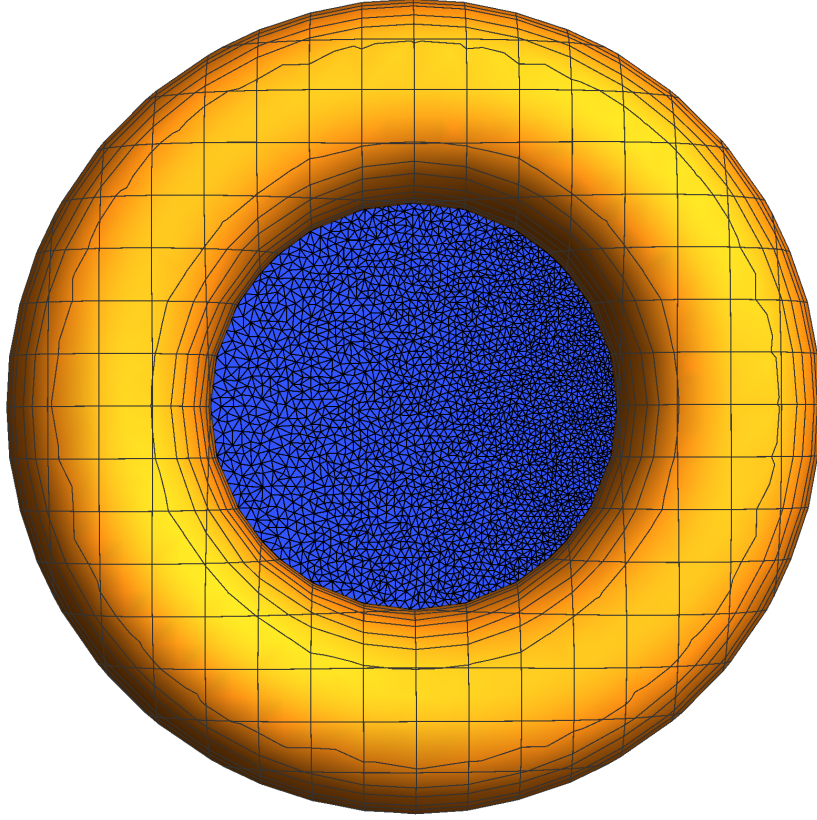


Abbildung 7: Bild zu Tabelle (45) für $\lambda = 16$:



Im Vergleich der beiden Graphiken können wir die Konvergenz beobachten: Für $\lambda = 1$ ist noch eine deutliche Lücke zwischen dem Rand der Fläche und dem Torus zu sehen, wogegen die Lücke mit $\lambda = 16$ bereits so klein geworden ist, dass sie im Bild keine Rolle mehr spielt.

Auf beiden Bildern ist sehr gut der Effekt des nicht rotationsinvarianten, vierten Terms zu sehen: Die Fläche wird deutlich nach rechts gestaucht (in Richtung des Punktes P , der dort auf dem Torus liegt), dort sind die Dreiecke etwas kleiner als an der linken Seite.

Aus Tabelle (45) entnehmen wir, dass die experimentelle Konvergenzordnung um 1 zu liegen scheint. Das ist deutlich besser als die Ordnung $\frac{1}{9}$, die wir für ein Polynom vierter Ordnung beweisen können (siehe Bemerkung nach Satz 10). Diese Vermutung wollen wir noch anhand einer einfachen heuristischen Rechnung untermauern: Schicken wir im Funktional $F_{\lambda,\eta}$ den Parameter η gegen ∞ , so erhalten wir das Funktional

$$\tilde{F}_\lambda(X) = D(X) + \lambda \int_{\partial B} G(X)^2 |X_\varphi|.$$

Sei G jetzt die signierte Distanzfunktion zum Torus, dann können wir davon ausgehen, dass Lösungen Kreisscheiben vom Radius R sein müssen (also

$X(x, y, z) = (Rx, Ry, 0)$, $R \in [0, 1]$) und wir erhalten die Funktion

$$\tilde{F}_\lambda(R) = \pi R^2 + 2\pi\lambda(1 - R)^2 R$$

mit der Ableitung

$$\tilde{F}'_\lambda(R) = 2\pi R + 2\pi\lambda(1 - R)^2 - 4\pi\lambda R(1 - R).$$

Es folgt

$$\tilde{F}'_\lambda(R) = 0 \Leftrightarrow R^2 - \frac{4\lambda - 1}{3\lambda}R + \frac{1}{3} = 0,$$

das Minimum von $F_\lambda(R)$ liegt also bei

$$R_\lambda = \frac{4\lambda - 1}{6\lambda} + \sqrt{\left(\frac{4\lambda - 1}{6\lambda}\right)^2 - \frac{1}{3}} = \frac{4\lambda - 1 + \sqrt{4\lambda^2 - 8\lambda + 1}}{6\lambda}.$$

Der Fehler $D(\tilde{X}) - D(X_\lambda)$ ist also die Fläche A_λ des Kreisringes zwischen den Radien 1 und R_λ :

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \pi(1 - R_\lambda^2) = \pi \left(\frac{36\lambda^2 - (4\lambda - 1 + \sqrt{4\lambda^2 - 8\lambda + 1})^2}{36\lambda^2} \right) \\ &= \pi \left(\frac{8\lambda^2 + 8\lambda - 1 - (4\lambda - 1)\sqrt{4\lambda^2 - 8\lambda + 1}}{18\lambda^2} \right) \end{aligned}$$

Sei nun λ beliebig und $\tilde{\lambda} = \alpha\lambda$, dann gilt mit der Regel von L'Hospital

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A_\lambda}{A_{\tilde{\lambda}}} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\frac{\partial A_\lambda}{\partial \lambda}}{\frac{\partial A_{\tilde{\lambda}}}{\partial \lambda}} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{9\lambda^3} \left(1 - 4\lambda - \frac{10\lambda^2 - 8\lambda + 1}{\sqrt{4\lambda^2 - 8\lambda + 1}} \right)}{\frac{\pi}{9\alpha^2\lambda^3} \left(1 - 4\alpha\lambda - \frac{10\alpha^2\lambda^2 - 8\alpha\lambda + 1}{\sqrt{4\alpha^2\lambda^2 - 8\alpha\lambda + 1}} \right)} = \alpha$$

und für

$$eoc(D) := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{D(\tilde{X}) - D(X_\lambda)}{D(\tilde{X}) - D(X_{\tilde{\lambda}})} \right) \bigg/ \ln \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \right)$$

erhalten wir

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} eoc(D) \approx \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{A_\lambda}{A_{\tilde{\lambda}}} \right) \bigg/ \ln \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \right) = \frac{\ln(\alpha)}{\ln(\alpha)} = 1.$$

Ob die obige Rechnung nur für den Torus gilt, oder exemplarisch für alle Stützflächen ist, kann an dieser Stelle nicht abschließend geklärt werden. Hier können wir nur stark vermuten, dass die in Kapitel 5 bewiesene Konvergenzordnung für den Torus nicht optimal ist.

Beachte, dass wir oben zur Darstellung von S nicht die Distanzfunktion benutzt haben, sondern ein Polynom vierter Ordnung. Trotzdem haben wir experimentell die Konvergenzordnung 1 beobachtet!

Zum Schluss wollen wir nun einige ausgewählte Anwendungen vorstellen. Grundsätzlich bietet sich folgende Vorgehensweise an, um gute Ergebnisse zu erhalten: Ist eine Funktion G und ein Polygon Π (bzw. eine Position der potentiellen

Lösung) vorgegeben, so müssen Startwerte gewählt werden, die die Verlinkungsbedingung erfüllen. Dabei bietet es sich natürlich an, die Startwerte so gut wie möglich an die erwartete Lösung anzupassen, um möglichst zu verhindern, dass die Fläche aus der richtigen Position „herausrutscht“. (Da die Verlinkungsbedingung in der Implementierung keine Rolle spielt, sind die Startwerte die einzige Möglichkeit, eine Position der Lösung zu wählen!)

Anschließend müssen die Parameter λ und η so eingestellt werden, dass die Terme in einem vernünftigen Maße gewichtet sind. Dabei sollte (für die Startwerte) der Strafterm höchstens die gleiche Größenordnung wie das Dirichletintegral haben. Die letzten beiden Terme dürfen (und sollten) durchaus sehr klein sein, erfahrungsgemäß ist eine Größenverhältnis von 1 : 100 zu den anderen Termen völlig ausreichend.

Hat man nun zu gewähltem h und ϵ eine Lösung erhalten, kann diese wieder als Startwert für größere Werte von λ und η genommen werden. Nun können λ und η schrittweise erhöht werden, bis der Strafterm nicht mehr kleiner wird. Für das gewählte h ist dann die optimale Lösung nahezu erreicht, weil, wie oben schon beschrieben, der Strafterm abhängig von h nach unten beschränkt ist. (Erhöht man hier den Parameter λ weiter, so erhält man häufig unsinnige „Ausfransungen“ am Rand der Fläche, da die Bedeutung des Dirichletintegrals abnimmt.) Für eine Lösung γ_h des diskreten Problems definieren wir die Größe

$$Q(\lambda, h) = \frac{E_h^\lambda(\gamma_h) - D_h(\Phi_h(\gamma_h(\pi^{-1})))}{D_h(\Phi_h(\gamma_h(\pi^{-1})))}$$

als Maß für die Qualität des Ergebnisses. Ist $Q(\lambda, h)$ klein, so kann man davon ausgehen, dass die errechnete Lösung der Lösung des freien Randwertproblems sehr nahe kommt. Falls $Q(\lambda, h)$ noch nicht zufriedenstellend klein ist, muss h weiter verkleinert und mit der schrittweisen Erhöhung von λ und η fortgefahren werden. (Siehe insbesondere Beispiel 5.) Beachte, dass Q natürlich von der Stützfläche und der gewählten Funktion G abhängt und demnach keine absolute Größe ist!

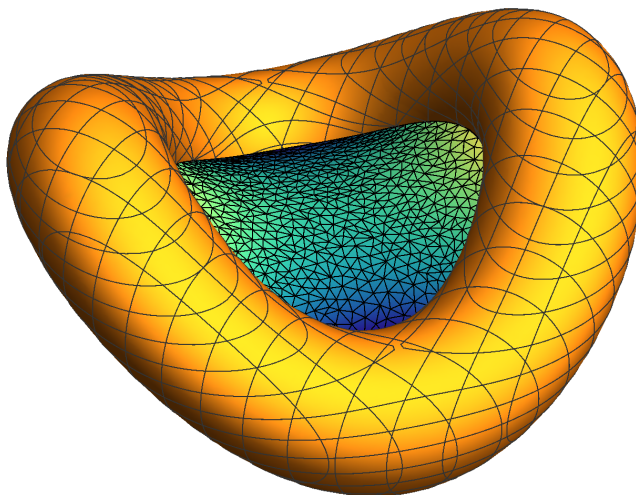
Für die Fehlertoleranz ϵ setzen wir normalerweise $\epsilon = 0.001$, da das Newton-Verfahren dann in aller Regel konvergiert. Für die meisten der hier betrachteten Beispiele könnte ϵ auch deutlich kleiner gewählt werden, wir beobachten dann aber keine signifikanten Änderungen der Ergebnisse mehr. Obwohl das Newton-Verfahren für die grobe Berechnung der Lösungen in allen betrachteten Fällen sehr gut geeignet ist, erzielen wir in seltenen Fällen keine hinreichende Genauigkeit. Möchte man genauere Ergebnisse erzielen, so können anschließend für den „letzten Schliff“ andere Verfahren gewählt werden. (Siehe Beispiel 8.)

Beispiel 2: Die erste naheliegende Stützfläche außer dem Torus ist eine Fläche, die den topologischen Typ des Torus beibehält, aber keine ebene Minimalfläche mehr umschließt. Dazu lenken wir den Torus in z -Richtung mit einer Sinuskurve aus:

$$G(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + \left(z - \frac{\sin(2 \operatorname{Arg}(x + iy))}{2} \right)^2 + 2 \right)^2 - 9(x^2 + y^2)$$

Für ϵ und C wie oben, $h = 0.13443$ und $\lambda = 16$ haben wir $D_h = 3.52099$ und $E_h^\lambda = 3.53532$, also $Q(\lambda, h) = 0.00407$.

Abbildung 8: Bild zu Beispiel 2

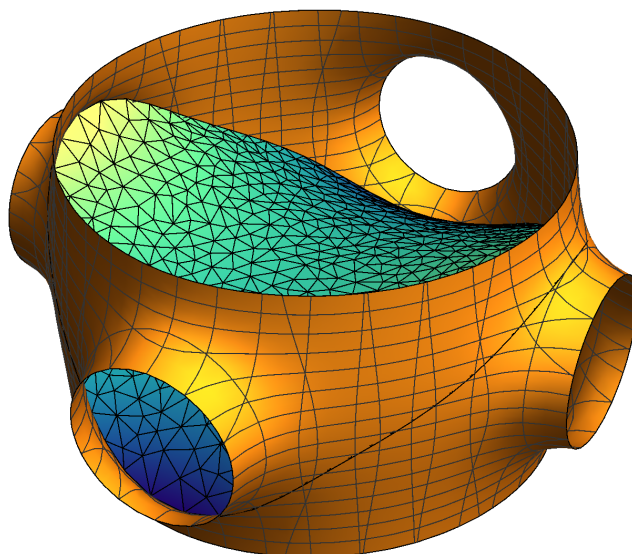


Beispiel 3: Als nächstes wollen wir eine Fläche untersuchen, die nicht mehr dem topologischen Typ des Torus entspricht. Dazu nehmen wir die Funktion

$$G(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 10) (x^2 + z^2 - 1) (y^2 + z^2 - 1) - 25$$

und geeignet gewählte Startwerte, so dass wir keine triviale Minimalfläche erhalten. Mit $\lambda = 0.01$, $C = 10000$, $h = 0.13443$ und $\epsilon = 0.001$ gilt $D_h = 41.4552$ und $E_h^\lambda = 42.9069$, also $Q(\lambda, h) = 0.03502$. Im Bild ist der freie Rand als Kurve auf der Stützfläche zu erkennen. (Siehe Abbildung 9.)

Abbildung 9: Bild zu Beispiel 3



Bei der oben gewählten Funktion G laufen alle 6 Röhren ins Unendliche (im Bild abgeschnitten, um die Lösung sichtbar zu machen). Strenggenommen ist das nicht erlaubt, da wir gefordert hatten, dass S eine kompakte Untermannigfaltigkeit ist! Um alles rigoros zu machen, müsste die Stützfläche außerhalb des relevanten Bereiches so abgeändert werden, dass dies erfüllt ist. (Dazu gibt es viele verschiedenen Möglichkeiten, z.B. könnte man je zwei Röhrenenden glatt verbinden. Dann läge die Lösung im Inneren der von der S umschlossenen Menge. Man kann S aber auch so fortsetzen, dass die Lösung außerhalb dieser Menge liegt.)

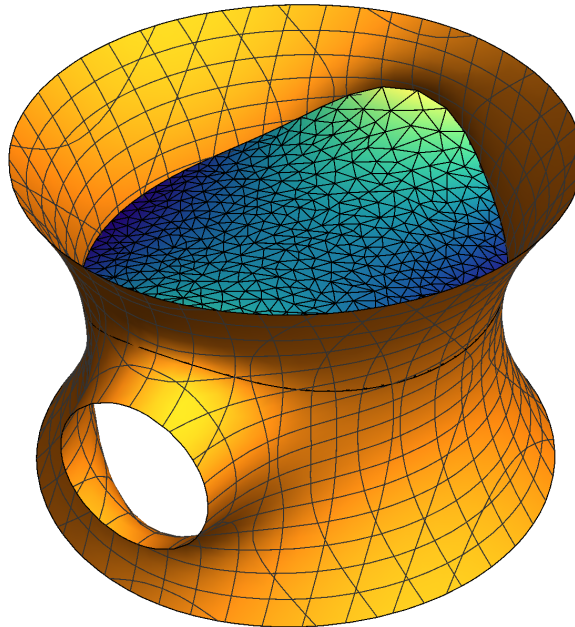
Interessant ist hier außerdem, dass die obige Lösung nicht durch die Wahl eines einzigen Polygons Π erzwungen werden kann. Egal, wie wir die Stützfläche fortsetzen oder wie wir Π wählen würden, wäre eine Lösung im Sinne von Satz 1 immer eine Kreisscheibe in einer der Röhren. Um die obige Position der Lösung zu garantieren, benötigen wir zwei verschiedene Polygone, die jeweils die Verlinkungsbedingung erfüllen! Beachte, dass die Existenzaussage (Satz 1) in diesem Fall nicht mehr gilt (und allgemein auch gar nicht mehr gelten kann)!

Beispiel 4: Eine ähnliche Stützfläche ist gegeben durch

$$G(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2 - 10)(x^2 + z^2 - 1) - 10.$$

Mit $\lambda = 0.1$, $C = 10000$, $h = 0.13443$ und $\epsilon = 0.001$ gilt $D_h = 42.9789$ und $E_h^\lambda = 43.2267$, also $Q(\lambda, h) = 0.00577$.

Abbildung 10: Bild zu Beispiel 4



Im Gegensatz zu Beispiel 3 können wir hier nach einer geeigneten Fortsetzung der Stützfläche ein einfaches Polygon wählen, so dass die obige Fläche eine Lösung ist. Diese ist nicht eindeutig, denn eine weitere Lösung ist durch die an

der x - y -Ebene gespiegelte Fläche gegeben.

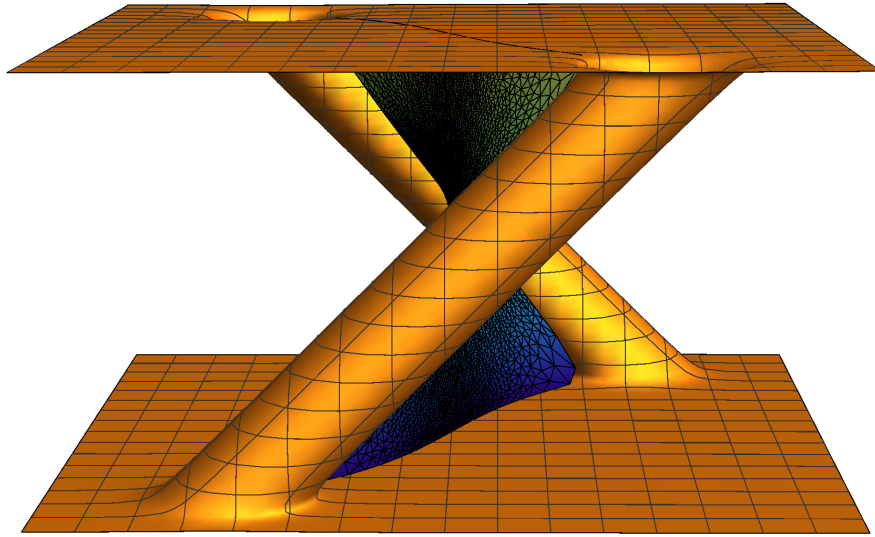
Der deutlich bessere Wert für Q resultiert aus der niedrigeren Ordnung des Polynoms G . Je einfacher die gewählte Funktion G ist, desto leichter erhält man gute Werte für Q !

Beispiel 5: Wir wollen nun noch eine Stützfläche betrachten, die eine etwas kompliziertere Minimalfläche umschließt. Wir verwenden die Funktion

$$G(x, y, z) = ((x+z)^2 + (y-4)^2 - 1) ((x-z)^2 + (y+4)^2 - 1) (z-3)(z+3) + 16.$$

Mit $\lambda = 0.0016$, $C = 200000$, $h = 0.04725$ und $\epsilon = 0.001$ gilt $D_h = 43.0584$ und $E_h^\lambda = 44.8145$, also $Q(\lambda, h) = 0.04078$.

Abbildung 11: Bild zu Beispiel 5



Insgesamt beobachten wir, dass umso feinere Gitter benötigt werden, um gute Werte für Q zu erhalten, je mehr die Lösung von der Kreisform abweicht.

In diesem Beispiel konvergiert für kleinere ϵ das gedämpfte Newton-Verfahren nicht mehr. Da in den letzten Iterationen keinen nennenswerten Änderungen an D_h bzw. E_h^λ mehr zu beobachten waren, betrachten wir die berechnete Lösung als hinreichend genau.

Ähnlich wie in den vorigen Beispielen laufen hier die Ebenen ins Unendliche. Durch Modifikation der Stützfläche außerhalb des relevanten Bereichs erhalten wir eine kompakte Untermannigfaltigkeit vom topologischen Typ des Torus.

Man kann auch halbfreie Randwertprobleme simulieren, indem man einen dünnen Torus statt einer Kurve verwendet und die Schnittstellen entsprechend glättet.

Beispiel 6: Wir verwenden die Funktion

$$G(x, y, z) = ((x^2 + y^2 + z^2 + 4)^2 - 16(x^2 + y^2))(x + z) - \frac{1}{10},$$

$\epsilon = 0.001$ und $C = 100$. Dieses Beispiel eignet sich gut, um anhand einiger Zwischenergebnisse die Konvergenz zu verdeutlichen.

Abbildung 12: Bild zu Beispiel 6 für $h = 0.13443$ und $\lambda = 2$. Es gilt $D_h = 4.38534$ und $E_h^\lambda = 4.73317$, also $Q(\lambda, h) = 0.07932$.

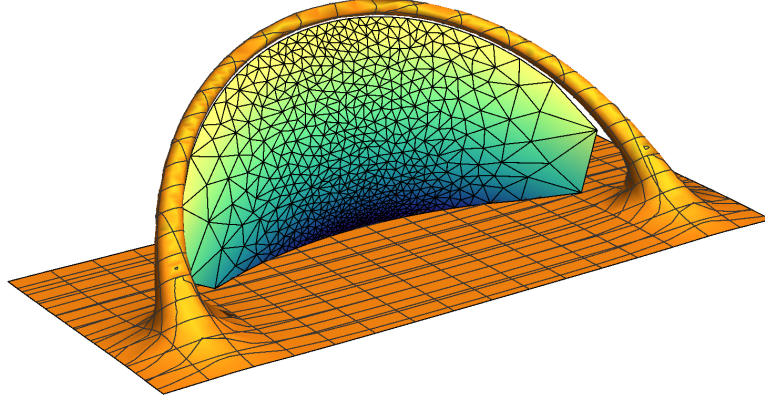
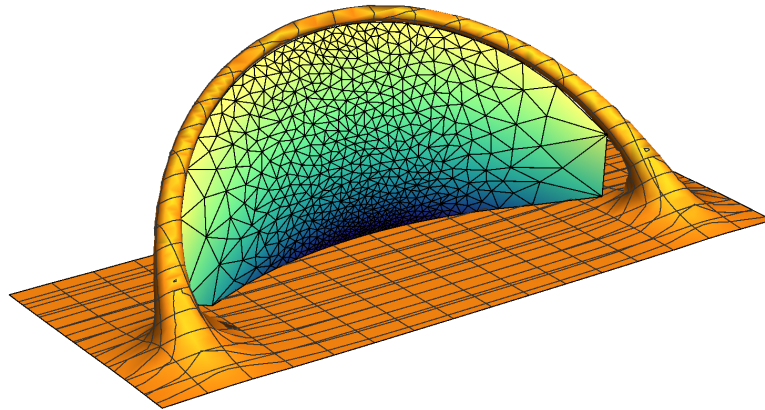
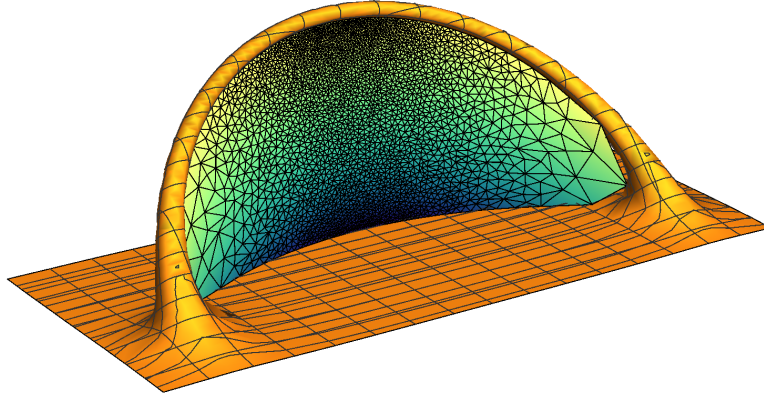


Abbildung 13: Bild zu Beispiel 6 für $h = 0.13443$ und $\lambda = 6$. Es gilt $D_h = 4.64759$ und $E_h^\lambda = 4.84273$, also $Q(\lambda, h) = 0.04199$.



Auch hier kann man (wie oben beim Torus) die Konvergenz in λ beobachten, wobei in den Ecken bei $\lambda = 6$ immer noch eine Lücke zu erkennen ist. Da wir das Dirichletintegral minimieren, möchte die Fläche natürlich eine möglichst „konforme“ Parametrisierung erreichen, wodurch die Dreiecke in den Ecken sehr grob werden. Wir können hier λ nicht noch größer wählen, ohne h weiter zu verkleinern, weil die untere Schranke des Strafterms für das gewählte h schon im Wesentlichen erreicht ist. (Für $\lambda = 8$ beginnen die Ränder der Fläche schon „auszufransen“.)

Abbildung 14: Bild zu Beispiel 6 für $h = 0.07000$ und $\lambda = 24$. Es gilt $D_h = 4.66996$ und $E_h^\lambda = 4.76487$, also $Q(\lambda, h) = 0.02032$.



Für kleineres h können wir λ deutlich größer wählen und beobachten ein weiteres Fortschreiten der Konvergenz, was sich in einem kleineren Wert für $Q(\lambda, h)$ widerspiegelt. Trotzdem sind die Dreiecke in den Ecken noch recht grob und es sind noch Lücken zu erkennen. Um genauere Ergebnisse zu erhalten, würden sich hier sicherlich auch adaptive Methoden anbieten.

Beispiel 7: Eine Variante von Beispiel 6 ist gegeben durch die Funktion

$$G(x, y, z) = \left((x^2 + y^2 + z^2 + 4)^2 - 16(x^2 + y^2) \right) \left((x^2 + y^2 + z^2 - 1)x + \frac{1}{10} \right) - \frac{1}{10}.$$

Wir wählen $\epsilon = 0.001$, $C = 100$, $h = 0.13443$ und $\lambda = 16$. Dann haben wir $D_h = 7.45652$ und $E_h^\lambda = 7.51755$, also $Q(\lambda, h) = 0.00818$.

Abbildung 15: Bild zu Beispiel 7.

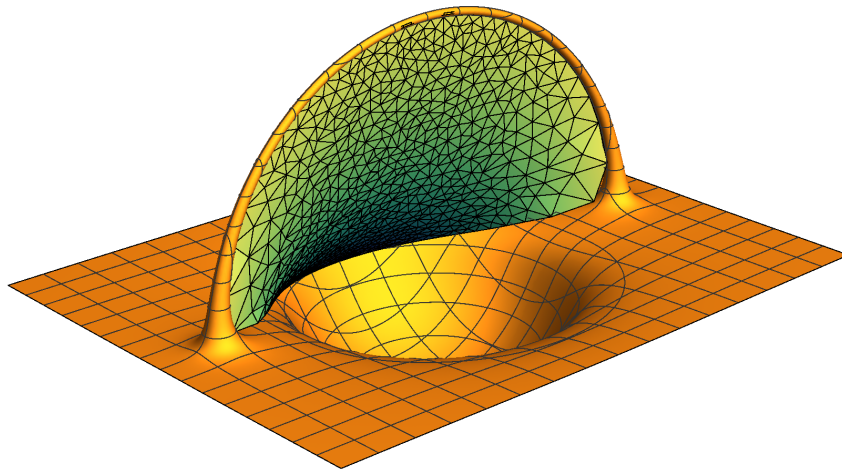
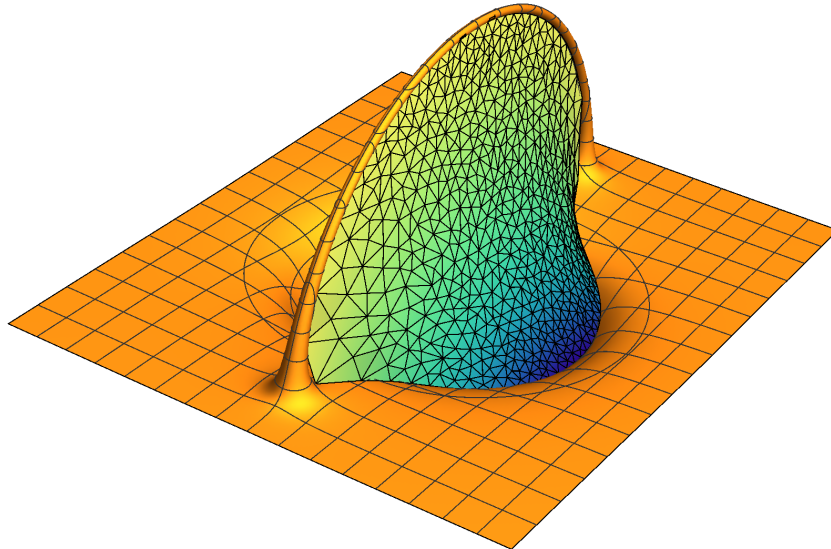


Abbildung 16: Dieselbe Graphik nochmal aus einer anderen Perspektive.

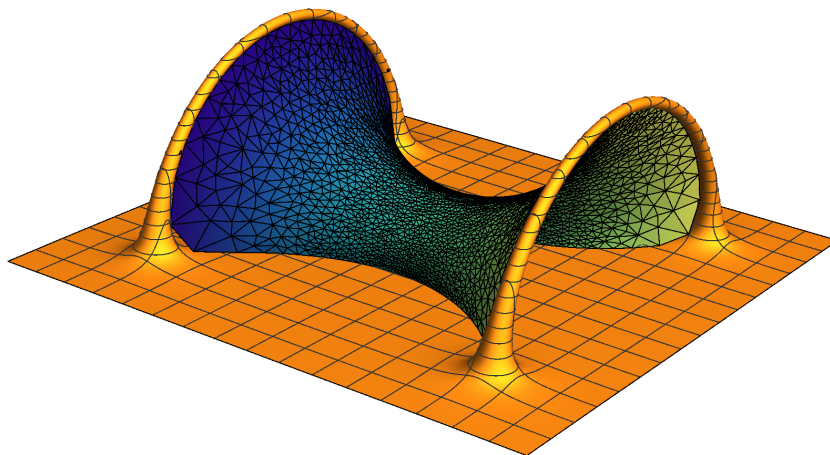


Beispiel 8: Eine weitere Variante ist gegeben durch die Funktion

$$G(x, y, z) = \left((\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + (z - 2)^2 \right) \left((\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + (z + 2)^2 \right) x - \frac{1}{10}.$$

Wir wählen $\epsilon = 0.1$, $C = 100$, $h = 0.07000$ und $\lambda = 16$. Dann haben wir $D_h = 17.8173$ und $E_h^\lambda = 18.0046$, also $Q(\lambda, h) = 0.01051$.

Abbildung 17: Bild zu Beispiel 8.



Dieses Beispiel scheint äußerst ungünstig für das Newton-Verfahren zu sein. Wir beobachten, dass es nur bis etwa $\epsilon = 1$ konvergiert. Hier wurde nach dem Newton-Verfahren noch ein simples Gradientenabstiegsverfahren angewandt,

um die Lösung genauer zu bestimmen. Dieses konvergiert jedoch sehr langsam, so dass wir uns hier mit der Fehlertoleranz $\epsilon = 0.1$ zufriedengeben.

Die obigen Beispiele und Bilder sind natürlich nur eine kleine Auswahl der möglichen Anwendungen. Da wir Stützflächen beliebigen topologischen Geschlechts verwenden können, ergeben sich auch beliebig viele Varianten des freien Randwertproblems.

15 Das Plateau-Problem und Stützflächen mit Rändern

In diesem Kapitel wollen wir zuerst zeigen, dass die in dieser Arbeit vorgestellte Strafmethode auch auf das klassische Plateau-Problem angewandt werden kann. Die wesentlichste zusätzliche Schwierigkeit ist die Frage nach einer geeigneten Straffunktion G : Ist S eine Kurve und keine Fläche, so kann eine signierte Distanzfunktion nicht definiert werden, die gewöhnliche Distanzfunktion ist aber nicht glatt.

Wir benötigen folgende Eigenschaft von S : Für ein $\mu > 0$ klein genug existiere eine C^3 -Funktion Φ von $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ nach T_μ mit $\Phi(\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}) = S$, die 2π -periodisch in z ist und für alle z_0 ein Diffeomorphismus von $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1, z_0 \leq z < z_0 + 2\pi\}$ nach T_μ ist. Außerdem sollte S eine Parametrisierung besitzen, die eine geschlossene Jordankurve ist.

Wir gehen davon aus, dass dies erfüllt ist, wenn $S \subset \mathbb{R}^3$ eine 1-dimensionale, kompakte Untermannigfaltigkeit der Klasse C^3 ist. Statt Voraussetzung B stellen wir dann also die

Voraussetzung B': Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine 1-dimensionale, kompakte Untermannigfaltigkeit der Klasse C^3 .

Wir suchen nun eine Funktion $G \in C^3(U)$, wobei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung von S ist, mit $S = \{(x, y, z) \in U \mid G(x, y, z) = 0\}$ und $G(x, y, z) \geq 0$. Setzen wir $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, dann könnte man zum Beispiel $G(x, y, z) = f(\Phi^{-1})$ setzen.

Des Weiteren benötigen wir anstatt von Satz 4 ein anderes Regularitätsresultat:

Satz 4' Sei S eine Jordan-Kurve der Klasse $C^{m,\alpha}$, $m \geq 1$, $\alpha \in (0, 1)$. Dann ist jeder stationäre Punkt des Dirichletintegrals in $\mathcal{C}(\Pi, S)$ von der Klasse $C^{m,\alpha}(\overline{B})$.

Dies folgt aus Theorem 4 in Kapitel 2.5 und Theorem 1 in Kapitel 2.3 von [6]. Nun können sämtliche weiteren Teile der Arbeit, abgesehen von Kapitel 5, fast wörtlich übernommen werden.

Auch eine Anpassung von Kapitel 5 scheint möglich, wenn wir davon ausgehen, dass die „Parallellflächen“ ∂T_{μ_0} von S (in diesem Fall Schläuche um die Kurve S) so glatt sind wie S . Hier entsteht jedoch eine zusätzliche technische Schwierigkeit, da die Hauptkrümmungen von ∂T_{μ_0} für $\mu_0 \rightarrow 0$ nicht beschränkt sind. Natürlich würden wir auch eine andere Konvergenzordnung erhalten.

Bemerkung: Da wir die Funktion G in diesem Fall sowieso als positiv voraussetzen, können wir im Funktional F_λ auch G^2 durch G ersetzen. Dies vereinfacht viele Rechnungen und ist numerisch günstiger.

Zum Schluss wollen wir noch kurz überlegen, inwieweit man die hier betrachtete Methode auch auf Stützflächen mit Rändern ausweiten kann. Hier stellt sich auch wieder das Problem, eine glatte Funktion G zu finden, die die Stützfläche S darstellt. Dies ist aber deutlich schwieriger als in den bisher betrachteten Si-

tuationen, denn wir stellen fest, dass die Distanzfunktion selbst in sehr simplen Fällen (z.B. wenn S eine Kreisscheibe ist) nicht glatt genug ist. Hier erwarten wir nur $d \in C^{1, \frac{1}{2}}$ außerhalb von S und es ist auch nicht klar, ob es andere Funktionen G gibt, die eine höhere Regularität haben.

Desweiteren gilt nur eine deutlich schwächere Variante von Satz 4: Wenn der Rand von S nicht leer ist, so ist das bestmögliche Regularitätsresultat für eine Lösung \tilde{X} von $\mathcal{P}(\Pi, S)$ im Allgemeinen nur $\tilde{X} \in C^{1, \frac{1}{2}}(\bar{B})$. (Siehe Remark 1 in Kapitel 1.8 von [5].) Dies ist ausreichend, um das Existenzresultat aus Kapitel 3 zu übernehmen (Satz 5). Die Hauptergebnisse der Kapitel 4 und 8 (Satz 9 und Satz 15) gelten ebenfalls, das Ergebnis von Kapitel 5 (Satz 10) kann mit unserer Methode aber nicht mehr bewiesen werden.

Da aus der obigen Voraussetzung an d folgt, dass $d^2 \in C^1(T_\mu)$ gilt, können wir dann zumindest die erste Variation bilden und die dazugehörigen Ergebnisse aus Kapitel 9 und 10 übernehmen. Man könnte dann eventuell mit einem Gradientenabstiegsverfahren Lösungen ermitteln. Leider ist zu erwarten, dass ein Regularitätsresultat wie in Kapitel 7 nicht gilt, wenn schon die Daten nicht glatt genug sind. So können wir also auch keine Ergebnisse aus den Kapiteln 12 und 13 übernehmen. Ob es möglich ist, eine Fehlerabschätzung zu zeigen, die mit dieser Regularität auskommt, ist eine offene Frage.

Ein weiterer Ansatz wäre, zu untersuchen, ob es mit Glättungen der Distanzfunktion möglich ist, eine Funktion $G \in C^3$ zu finden, die S darstellt (vorausgesetzt natürlich, dass S selbst glatt genug ist). Hätten wir eine solche Funktion, so könnten wir wieder alle Ergebnisse (mit denselben Einschränkungen in Kapitel 5 wie beim Plateau-Problem) übernehmen.

Literatur

- [1] ALT, H. W. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer, Berlin, 2006.
- [2] AXELSSON, O., AND BARKER, V. A. *Finite element solution of boundary value problems*, vol. 35 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2001.
- [3] BERGER, M. S. *Nonlinearity and functional analysis*. Academic Press, New York-London, 1977.
- [4] DIERKES, U., HILDEBRANDT, S., AND SAUVIGNY, F. *Minimal surfaces*, vol. 339 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer, Heidelberg, 2010.
- [5] DIERKES, U., HILDEBRANDT, S., AND TROMBA, A. J. *Global analysis of minimal surfaces*, vol. 341 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer, Heidelberg, 2010.
- [6] DIERKES, U., HILDEBRANDT, S., AND TROMBA, A. J. *Regularity of minimal surfaces*, vol. 340 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer, Heidelberg, 2010.
- [7] DZIUK, G., AND HUTCHINSON, J. E. The discrete Plateau problem: algorithm and numerics. *Math. Comp.* 68, 225 (1999), 1–23.
- [8] DZIUK, G., AND HUTCHINSON, J. E. The discrete Plateau problem: convergence results. *Math. Comp.* 68, 226 (1999), 519–546.
- [9] FORSTER, O. *Analysis 2*. Vieweg, Braunschweig, 2006.
- [10] FORSTER, O. *Analysis 3*. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2009.
- [11] FREITAG, E., AND BUSAM, R. *Funktionentheorie*. Springer, Berlin, 1993.
- [12] GILBARG, D., AND TRUDINGER, N. S. *Elliptic partial differential equations of second order*, vol. 224 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer, Berlin, 1983.
- [13] HILDEBRANDT, S. *Analysis 2*. Springer, Berlin, 2003.
- [14] LIONS, J.-L., AND MAGENES, E. *Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. I*, vol. 181 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer, New York-Heidelberg, 1972.
- [15] MORREY, JR., C. B. *Multiple integrals in the calculus of variations*. Classics in Mathematics. Springer, Berlin, 2008.
- [16] NITSCHKE, J. C. C. *Vorlesungen über Minimalflächen*, vol. 199 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer, Berlin-New York, 1975.
- [17] POZZI, P. L^2 -estimate for the discrete Plateau problem. *Math. Comp.* 73, 248 (2004), 1763–1777 (electronic).
- [18] TCHAKOUTIO, P. The Numerical Approximation of Minimal Surfaces with Free Boundaries by Finite Elements. Dissertation, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg i.Br. 2002.